

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

УДК: 681:004.896(043)

Қолжазба құқығында

АМАНОВ БЕКЗАТ ОНДАСЫНУЛЫ

Гуманоид тәріздес робот қолының динамикасы және басқаруы.

6D060300 – Механика

Философия докторы (PhD) дәрежесіне диссертация

Отандық ғылыми кеңесші:
т.ғ.д., профессор,
ҚР ҰҒА және ҚР ҰИА академигі,
Байгунчехов Жумадил Жанабаевич
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық
университеті

Шетелдік ғылыми кеңесші:
Phd, профессор, Сарош Пател,
Бриджпорт университеті, АҚШ

Қазақстан Республикасы
Алматы, 2026 ж.

Мазмұны

Глоссарий	3
Кіріспе	18
1. Әдебиеттерге шолу	29
1.1. Гуманоид роботтар. Гуманоид робот қолының кинематикасы және динамикасы	29
1.2. Реабилитациялық робототехника	36
1.3. Қашықтан басқару немесе телеоперация және тактильді кері байланыс	37
1.4. Манипуляторлардың траекториясын жоспарлау	37
1.5. Адам қимылын тану және биоимитация	39
1.6. Әдеби шолудың қорытындысы	40
2. Гуманоид робот қолдың математикалық моделі	41
2.1. Гуманоид робот қолдың кинематикасы	41
2.2. Ерекше жағдайлар (сингулярлық жағдайлар)	50
2.3. MATLAB ортасында робот қолының қозғалысын визуализациялау және кері кинематика есебін тексеруге арналған бағдарламалар	52
2.4. Якобиан матрицасы	62
2.5. Динамика. Лагранж – Эйлер әдісі	66
2.5.1. Гуманоид қолының кинетикалық энергиясы	69
2.5.2. Гуманоид робот-қолының потенциалдық энергиясы	71
2.5.3. Гуманоид робот-қолының қозғалысының теңдеуі	71
2.6. Робот қолының эксперименттік прототипінің 3D нұсқасы мен динамикасы ..	71
3. Гуманоид робот қолының траекториясы жоспарлаудың әдістері	83
3.1. Гуманоид робот қолының траекториясы жоспарлаудың негізгі ұғымдары	83
3.2. Сызықтық интерполяция әдісі	84
3.3. Кубтық полиномдар әдісі	85
3.4. Бесінші дәрежелі полиномдар әдісі	88
3.5. РТР нүктеден нүктеге траекторияны жоспарлау әдісі	90
3.6. LIN – сызықтық траекторияны жоспарлау	92
3.7. Реабилитацияға арналған адаптивті траекторияны жоспарлау әдісі	97
4. Робот қолының басқару жүйелері	102
4.1. Есептелген моментті басқару әдісі	102
4.1.1. Математикалық модель және басқару заңын құру	103
4.1.2. Гуманоид робот қол үшін есептелген моментті басқару әдісін қолдану	105
4.2. Импеданстық басқару	107
Қорытынды	113

Глоссарий

гуманоид робот қол — адам қолының құрылымы мен қимылын ішінара немесе толық қайталайтын роботтық манипулятор.

Ағылш.: humanoid robot arm / humanoid robotic arm.

екі мақсатты гуманоид робот қол — қашықтан басқару және инсульттен кейінгі реабилитация міндеттерін қатар орындайтын робот қол.

Ағылш.: dual-purpose humanoid robot arm.

робот қол — диссертациядағы негізгі қысқартылған атау.

соңғы атқарушы орган — робот қолдың тапсырманы тікелей орындайтын соңғы жұмысшы бөлігі.

Ағылш.: end-effector.

траекторияны жоспарлау — робот қозғалысының уақыт бойынша орындалу заңын анықтау үдерісі.

Ағылш.: trajectory planning.

қашықтан басқару — оператордың роботты арақашықтықтан басқаруы.

Ағылш.: teleoperation / remote control.

робот гид — адамдарға бағыт көрсететін, объектілерді нұсқайтын қашықтан басқарылатын сервистік робот.

Ағылш.: robot guide / telepresence guide robot.

реабилитация — инсульттен кейінгі қимыл-қозғалыс функцияларын қалпына келтіруге бағытталған терапиялық үдеріс.

Ағылш.: rehabilitation.

инсульттен кейінгі реабилитация — инсульт салдарынан бұзылған қозғалыс функцияларын роботтық немесе дәстүрлі әдістермен қалпына келтіру.

Ағылш.: post-stroke rehabilitation.

еркіндік дәрежесі — робот жүйесінің тәуелсіз қозғалыс параметрлерінің саны.

Ағылш.: degree of freedom, DOF.

алты еркіндік дәрежелі робот қол — 6 тәуелсіз буындық координатасы бар робот қол.

Ағылш.: 6-DOF robot arm.

буын — робот қолдың айналмалы немесе ілгерілемелі қозғалыс жасайтын түйіні.

Ағылш.: joint.

буын бұрышы — айналмалы буынның ағымдағы бұрылу мәні.

Ағылш.: joint angle.

буындық айнымалы — буын күйін сипаттайтын жалпыланған координата.

Ағылш.: joint variable.

буындық кеңістік — роботтың күйі буын бұрыштары арқылы сипатталатын кеңістік.

Ағылш.: joint space / configuration space.

Декарттық кеңістік — роботтың позициясы мен бағдары тікелей кеңістіктік координаталармен сипатталатын кеңістік.

Ағылш.: Cartesian space / task space.

иық — робот қолдың проксимал бөлігі, әдетте 3 еркіндік дәрежесін қамтиды.

Ағылш.: shoulder.

шынтақ — робот қолдың ортаңғы буыны.

Ағылш.: elbow.

білезік — робот қолдың соңғы атқарушы органға жақын орналасқан буындар тобы.

Ағылш.: wrist.

негізгі координаталар жүйесі — роботтың базасына бекітілген координаталар жүйесі.

Ағылш.: base coordinate frame.

локалдық координаталар жүйесі — жеке буынға немесе буындар арасындағы буынға бекітілген координаталар жүйесі.

Ағылш.: local coordinate frame.

санақ жүйесі — координаталар жүйесінің жалпы атауы.

Ағылш.: reference frame.

түрлендіру матрицасы — бір координаталар жүйесінен екіншісіне өтуге арналған матрица.

Ағылш.: transformation matrix.

біртекті түрлендіру матрицасы — позиция мен бағдарды бірге сипаттайтын 4×4 матрица.

Ағылш.: homogeneous transformation matrix.

айналу матрицасы — кеңістіктегі бағдарды сипаттайтын 3×3 матрица.

Ағылш.: rotation matrix.

позиция векторы — нүктенің кеңістіктегі орнын сипаттайтын вектор.

Ағылш.: position vector.

радиус-вектор — координаталар жүйесінің басынан нүктеге жүргізілген вектор.

Ағылш.: radius vector.

масса центрі — дене массасының шартты түрде жинақталған нүктесі.

Ағылш.: center of mass, COM.

жұмыс кеңістігі — соңғы атқарушы орган жете алатын барлық нүктелер жиыны.

Ағылш.: workspace.

қолжетімді жұмыс кеңістігі — соңғы атқарушы орган кем дегенде бір бағдармен жете алатын нүктелер жиыны.

Ағылш.: reachable workspace.

епті жұмыс кеңістігі — соңғы атқарушы орган кез келген бағдармен жете алатын нүктелер жиыны.

Ағылш.: dexterous workspace.

Денавит–Хартенберг параметрлері — көршілес буындардың геометриялық байланысын сипаттайтын стандартты параметрлер жиыны.

Ағылш.: Denavit–Hartenberg parameters, D–H parameters.

тура кинематика — буындық айнымалылар бойынша соңғы атқарушы органның позициясы мен бағдарын табу есебі.

Ағылш.: forward kinematics.

кері кинематика — соңғы атқарушы органның қажетті позициясы мен бағдары бойынша буындық айнымалыларды табу есебі.

Ағылш.: inverse kinematics.

жабық түрдегі шешім — аналитикалық формуламен алынатын нақты шешім.

Ағылш.: closed-form solution.

сандық әдіс — итерациялық немесе жуықтау арқылы алынатын шешім тәсілі.

Ағылш.: numerical method.

Pieper шарты — соңғы үш буын осьтері қиылысқанда немесе параллель болғанда кері кинематиканың жабық түрдегі шешімі бар екенін көрсететін шарт.

Ағылш.: Pieper criterion.

симуляция — математикалық модельді сандық түрде есептеу және талдау.

Ағылш.: simulation.

визуализация — есептеу нәтижелерін графикалық түрде көрсету.

Ағылш.: visualization.

Якобиан матрицасы — буындық жылдамдықтар мен Декарттық жылдамдықтар арасындағы байланысты сипаттайтын матрица.

Ағылш.: Jacobian matrix.

сызықтық Якобиан — соңғы атқарушы органның сызықтық жылдамдығына әсер ететін бөлік.

Ағылш.: linear Jacobian,

бұрыштық Якобиан — соңғы атқарушы органның бұрыштық жылдамдығына әсер ететін бөлік.

Ағылш.: angular Jacobian,

сызықтық жылдамдық — соңғы атқарушы органның x, y, z бағыттарындағы жылдамдығы.

Ағылш.: linear velocity.

бұрыштық жылдамдық — соңғы атқарушы органның айналу жылдамдығы.

Ағылш.: angular velocity.

сингулярлық — робот белгілі бір бағытта қозғала алмайтын немесе шексіз буын жылдамдығын талап ететін конфигурация.

Ағылш.: singularity.

сингулярлық конфигурация — Якобианның рангі төмендейтін қауіпті конфигурация.

Ағылш.: singular configuration.

шынтақ сингулярлығы — шынтақ буындары коллинеарланатын сингулярлық жағдай.

Ағылш.: elbow singularity.

иық сингулярлығы — иық буындарында еркіндік жоғалатын сингулярлық жағдай.

Ағылш.: shoulder singularity.

иық–шынтак сингулярлығы — иық пен шынтак осьтері белгілі бір күйде бір сызық бойына түскен жағдай.

Ағылш.: shoulder–elbow singularity.

детерминант — матрицаның сингулярлық қасиетін бағалауға қолданылатын шама.

Ағылш.: determinant.

скаляр көбейтінді — екі вектор немесе кватернион арасындағы бұрышты анықтауға қолданылатын амал.

Ағылш.: dot product.

векторлық көбейтінді — айналу мен сызықтық жылдамдықтарды есептеуде қолданылатын амал.

Ағылш.: cross product.

динамика — күштер, моменттер және олардың қозғалысқа әсерін зерттейтін бөлім.

Ағылш.: dynamics.

тура динамика — берілген моменттер бойынша үдеулерді табу есебі.

Ағылш.: forward dynamics.

кері динамика — берілген қозғалысты жүзеге асыру үшін қажет моменттерді табу есебі.

Ағылш.: inverse dynamics.

Эйлер–Лагранж әдісі — энергиялар арқылы қозғалыс теңдеулерін шығару тәсілі.

Ағылш.: Euler–Lagrange method.

Ньютон–Эйлер әдісі — күштер мен моменттер арқылы қозғалыс теңдеулерін шығару тәсілі.

Ағылш.: Newton–Euler method.

Лагранж функциясы — кинетикалық және потенциалдық энергиялар айырымы.

Ағылш.: Lagrangian.

жалпыланған координата — жүйенің күйін сипаттайтын тәуелсіз координата.

Ағылш.: generalized coordinate.

жалпыланған күш — жалпыланған координатаға сәйкес күш немесе момент.

Ағылш.: generalized force.

кинетикалық энергия — қозғалысқа байланысты энергия.

Ағылш.: kinetic energy.

потенциалдық энергия — дененің кеңістіктегі орнына байланысты энергия.

Ағылш.: potential energy.

инерция матрицасы — роботтың үдеу мен момент арасындағы байланысын сипаттайтын матрица.

Ағылш.: inertia matrix / mass matrix.

инерция тензоры — қатты дененің айналу инерциясын сипаттайтын тензор.

Ағылш.: inertia tensor.

Кориолис мүшесі — буындардың салыстырмалы қозғалысынан туындайтын динамикалық мүше.

Ағылш.: Coriolis term.

центрден тепкіш әсер — айналмалы қозғалыстан туындайтын инерциялық әсер.

Ағылш.: centrifugal term.

гравитациялық моменттер векторы — ауырлық күшін өтеуге қажет моменттер жиыны.

Ағылш.: gravity vector / gravity torques.

үйкеліс векторы — үйкелістен туындайтын қарсы әсерлер жиыны.

Ағылш.: friction vector.

тұтқыр үйкеліс — жылдамдыққа пропорционал үйкеліс.

Ағылш.: viscous friction.

Кулондық үйкеліс — қозғалыс бағытына тәуелді тұрақты шамалы үйкеліс.

Ағылш.: Coulomb friction.

сыртқы ауытқу — модельге кірмейтін сыртқы әсер.

Ағылш.: external disturbance.

модель белгісіздігі — нақты параметрлер мен модель параметрлері арасындағы айырмашылық.

Ағылш.: model uncertainty.

басқару заңы — өлшенген күйлер мен қалаулы мәндер бойынша басқарушы әсерді есептеу ережесі.

Ағылш.: control law.

басқарушы момент — жетектің буынға беретін моменті.

Ағылш.: control torque.

есептелген моментті басқару — робот динамикасын компенсациялау арқылы траекторияны дәл қадағалайтын басқару әдісі.

Ағылш.: Computed Torque Control, CTC.

кері динамикалық басқару — динамикалық модельге сүйеніп бейсызықтықты өтейтін басқару.

Ағылш.: inverse dynamics control.

кері байланыс арқылы сызықтандыру — бейсызық жүйені сызықтық мінез-құлыққа келтіру тәсілі.

Ағылш.: feedback linearization.

траекторияны қадағалау — нақты қозғалыстың берілген траекторияға жақындауын қамтамасыз ету.

Ағылш.: trajectory tracking.

қадағалау қатесі — қалаулы және нақты шамалар айырмасы.
Ағылш.: tracking error.

қателік динамикасы — қадағалау қатесінің уақыт бойынша өзгеру заңы.
Ағылш.: error dynamics.

тұйықталған жүйе — кері байланыс арқылы қалыптасқан басқару жүйесі.
Ағылш.: closed-loop system.

тұрақтылық — жүйенің уақыт өте тепе-теңдікке ұмтылу қасиеті.
Ағылш.: stability.

сипаттамалық көпмүше — сызықтық жүйе тұрақтылығын талдауға арналған полином.
Ағылш.: characteristic polynomial.

меншікті жиілік — жүйенің табиғи тербелу жиілігі.
Ағылш.: natural frequency.

өшу коэффициенті — тербелістің басылу дәрежесін сипаттайтын шама.
Ағылш.: damping ratio.

критикалық өшу — тербеліссіз ең жылдам орнығу режимі.
Ағылш.: critical damping.

пропорционалдық басқару — қателікке пропорционал әсер ететін басқару.
Ағылш.: proportional control.

дифференциалдық басқару — қателік өзгеру жылдамдығына пропорционал әсер ететін басқару.
Ағылш.: derivative control.

интегралдық басқару — қателіктің уақыт бойынша жиналуына пропорционал әсер ететін басқару.
Ағылш.: integral control.

PD реттегіш — пропорционалдық және дифференциалдық мүшелерден тұратын реттегіш.
Ағылш.: PD controller.

PID реттегіш — пропорционалдық, интегралдық және дифференциалдық мүшелерден тұратын реттегіш.
Ағылш.: PID controller.

алға байланыс — қалаулы үдеу не модель бойынша алдын ала есептелетін басқару бөлігі.
Ағылш.: feedforward.

кері байланыс — қателікке қарай түзететін басқару бөлігі.
Ағылш.: feedback.

робастты есептелген моментті басқару — модель белгісіздігі бар жағдайда тұрақтылықты сақтауға бағытталған CTC нұсқасы.
Ағылш.: Robust Computed Torque Control.

адаптивті есептелген моментті басқару — параметрлері уақыт бойынша бейімделетін CTC нұсқасы.
Ағылш.: Adaptive Computed Torque Control.

гибридті басқару — бірнеше басқару принципін біріктіретін тәсіл.
Ағылш.: hybrid control.

импеданстық басқару — роботтың позициясын ғана емес, сыртқы күштерге динамикалық жауабын да реттейтін басқару әдісі.
Ағылш.: Impedance Control.

механикалық импеданс — қозғалысқа жүйенің қаншалықты қарсылық көрсететінін сипаттайтын қасиет.
Ағылш.: mechanical impedance.

масса–серіппе–бәсеңдеткіш жүйесі — қозғалысты масса, серпімділік және бәсеңдету арқылы сипаттайтын модель.
Ағылш.: mass–spring–damper system.

қаттылық — позициялық ауытқуға қарсы серпімді реакция дәрежесі.
Ағылш.: stiffness.

бәсеңдету — қозғалыстағы энергияны жұтып, тербелісті азайтатын қасиет.
Ағылш.: damping.

виртуалды масса — басқару заңында енгізілетін жасанды инерциялық параметр.
Ағылш.: virtual mass.

виртуалды қаттылық — басқару заңында енгізілетін жасанды серпімділік параметрі.
Ағылш.: virtual stiffness.

виртуалды траектория — нақты емес, басқару мақсаты ретінде берілетін қалаулы траектория.
Ағылш.: virtual trajectory.

номиналды траектория — сыртқы күштер болмаса орындалатын базалық траектория.
Ағылш.: nominal trajectory.

сыртқы күш — қоршаған орта немесе адам тарапынан роботқа әсер ететін күш.
Ағылш.: external force.

сыртқы күштер мен моменттер векторы — күш пен моментті біріктіретін алты өлшемді вектор.
Ағылш.: wrench / external force-torque vector.

күш-момент датчигі — күш пен моментті өлшейтін сенсор.
Ағылш.: force/torque sensor, F/T sensor.

адмиттанстық басқару — сыртқы күшке сәйкес жаңа позициялық сілтемені есептейтін импеданстық басқару нұсқасы.
Ағылш.: Admittance Control.

позицияға негізделген импеданстық басқару — ішкі позициялық контурға сүйенетін импеданстық басқару тәсілі.
Ағылш.: Position-based impedance control.

күшке негізделген импеданстық басқару — буын моменттерін тікелей есептейтін импеданстық басқару тәсілі.

Ағылш.: Torque-based impedance control.

үйлесімді мінез-құлық — сыртқы күш әсерінде роботтың күшпен қарсыласпай икемделіп әрекет етуі.

Ағылш.: compliant behavior.

адаптивті импеданстық басқару — импеданс параметрлерін науқастың күйіне қарай нақты уақытта өзгерту.

Ағылш.: Adaptive Impedance Control.

пассивті режим — пациент қимыл жасамайтын, қозғалысты робот толық орындайтын режим.

Ағылш.: passive mode.

белсенді-көмекші режим — пациент қозғалысты бастап, робот оған жетіспеген бөлікте көмектесетін режим.

Ағылш.: active-assistive mode.

белсенді-қарсылық режимі — пациент қозғалысына робот реттелетін қарсылық жасайтын режим.

Ағылш.: active-resistive mode.

оқыту режимі — терапевт немесе оператор қимылын жазып алып, кейін соны қайталау режимі.

Ағылш.: teaching mode / demonstration mode.

терапевтік траектория — реабилитациялық мақсатпен берілген арнайы қозғалыс жолы.

Ағылш.: therapeutic trajectory.

спазм — бұлшықеттің еріксіз жиырылуы.

Ағылш.: spasm.

тремор — жоғары жиілікті еріксіз діріл.

Ағылш.: tremor.

қажу деңгейі — пациент бұлшықеттерінің шаршау дәрежесі.

Ағылш.: fatigue level.

қолды айналдыру жаттығуы — жұмыс кеңістігінде шеңбер тәрізді траекторияны орындау арқылы жасалатын терапиялық жаттығу.

Ағылш.: circular arm exercise.

телеоперация — оператордың роботты қашықтықтан басқаруы.

Ағылш.: teleoperation.

жетекші құрылғы — оператор тікелей басқаратын құрылғы.

Ағылш.: master device.

жетектелуші робот — жетекші құрылғы қозғалысын қайталайтын робот.

Ағылш.: slave robot.

екіжақты телеоперация — күштік және кинематикалық ақпарат екі бағытта да берілетін қашықтан басқару жүйесі.

Ағылш.: bilateral teleoperation.

күштік кері байланыс — роботтың сыртқы ортамен жанасу күшін операторға беру.

Ағылш.: force feedback.

хаптикалық кері байланыс — жанасу не кедергіні тактильді/күштік сезіндіру.

Ағылш.: haptic feedback.

оператормен өзара әрекеттесу — жетекші құрылғы арқылы адам мен робот арасындағы басқару байланысы.

Ағылш.: human-in-the-loop interaction.

жол — уақытқа тәуелсіз геометриялық сызық.

Ағылш.: path.

траектория — уақыт бойынша анықталған жол.

Ағылш.: trajectory.

қозғалыс профилі — жылдамдық пен үдеудің уақыт бойынша өзгеру заңы.

Ағылш.: motion profile.

тегістік — траекторияның туындыларының үздіксіздігімен анықталатын қасиет.

Ағылш.: smoothness.

C^0 үздіксіздік — позицияның үздіксіздігі.

Ағылш.: position continuity.

C^1 үздіксіздік — жылдамдықтың үздіксіздігі.

Ағылш.: velocity continuity.

C^2 үздіксіздік — үдеудің үздіксіздігі.

Ағылш.: acceleration continuity.

серпіліс — үдеудің уақыт бойынша туындысы.

Ағылш.: jerk.

жылдамдық профилі — жылдамдықтың уақытқа тәуелділігі.

Ағылш.: velocity profile.

үдеу профилі — үдеудің уақытқа тәуелділігі.

Ағылш.: acceleration profile.

сызықтық интерполяция — екі нүкте арасындағы тура пропорционалды өзгеріс.

Ағылш.: linear interpolation.

кубтық полином — үшінші дәрежелі полином негізіндегі траектория.

Ағылш.: cubic polynomial.

бесінші дәрежелі полином — **C^2 -тегістікті** қамтамасыз ететін бесінші дәрежелі полином.

Ағылш.: quintic polynomial.

сплайн-интерполяция — бірнеше нүктені тегіс байланыстыратын бөліктік полиномдық интерполяция.

Ағылш.: spline interpolation.

LSPB — сызықтық сегмент пен параболалық үйлестіруге негізделген траектория.

Ағылш.: Linear Segment with Parabolic Blend.

РТР траекториясы — соңғы атқарушы орган жолын тікелей бақыламай, буындық кеңістікте нүктеден нүктеге өту тәсілі.

Ағылш.: Point-to-Point trajectory.

LIN траекториясы — соңғы атқарушы органды Декарттық кеңістікте түзу сызық бойымен жүргізу тәсілі.

Ағылш.: linear Cartesian trajectory.

жол бойымен қозғалу — берілген геометриялық жол бойымен қозғалу есебі.

Ағылш.: Path Following

APF әдісі — мақсатқа тартылып, кедергіден итерілетін өрістерге негізделген жоспарлау.

Ағылш.: Artificial Potential Field.

PRM әдісі — ықтималдық жол карталарына негізделген жоспарлау.

Ағылш.: Probabilistic Roadmap.

RRT әдісі — кеңістікті кездейсоқ ағаш арқылы зерттейтін жоспарлау әдісі.

Ағылш.: Rapidly-exploring Random Tree.

дискреттеу — траекторияны уақыт немесе кеңістік бойынша бөлікке бөлу.

Ағылш.: discretization.

сегмент — траекторияның жеке бөлігі.

Ағылш.: segment.

аралық нүкте — негізгі нүктелердің арасында орналасқан жоспарлау нүктесі.

Ағылш.: intermediate point / waypoint.

интерполяция циклі — контроллер орындайтын уақыттық есептеу қадамы.

Ағылш.: interpolation cycle.

синхрондау — барлық буындардың қозғалысты бір мезетте бастап, бір мезетте аяқтауы.

Ағылш.: synchronization.

жетекші буын — жалпы уақытты анықтайтын ең баяу буын.

Ағылш.: master joint.

жетекші емес буындар — жетекші буынға бейімделіп қозғалатын қалған буындар.

Ағылш.: slave joints / non-master joints.

трапеция тәрізді жылдамдық профилі — үдеу, тұрақты жылдамдық және тежелу кезеңдері бар профиль.

Ағылш.: trapezoidal velocity profile.

үшбұрышты профиль — тұрақты жылдамдық фазасы жоқ жылдамдық профилі.

Ағылш.: triangular profile.

үдеу уақыты — жылдамдықты нөлден максимумға дейін жеткізуге кететін уақыт.

Ағылш.: acceleration time.

жалпы қозғалыс уақыты — траекторияны толық орындауға кететін уақыт.

Ағылш.: total motion time.

уақытты масштабтау — буындық траекторияларды ортақ уақытқа сәйкестендіру.

Ағылш.: time scaling.

бағдар — дененің кеңістіктегі бұрылу күйі.

Ағылш.: orientation.

Эйлер бұрыштары — бағдарды үш бұрыш арқылы сипаттау тәсілі.

Ағылш.: Euler angles.

roll, pitch, yaw — Эйлер бұрыштарының үш құрамдасы.

Қазақша: көлденең айналу, бойлық еңкею, тік ось бойымен бұрылу.

гимбалдық құлыпталу — Эйлер бұрыштарымен жұмыс істегенде еркіндік жоғалту мәселесі.

Ағылш.: gimbal lock.

кватернион — кеңістіктегі айналуды сипаттайтын төрт өлшемді параметр.

Ағылш.: quaternion.

SLERP — екі кватернион арасындағы сфералық сызықтық интерполяция.

Ағылш.: Spherical Linear Interpolation.

аралық кватернион — бастапқы және соңғы бағдар арасындағы уақыттық аралық бағдар.

Ағылш.: interpolated quaternion.

pick-and-place — нысанды бір жерден алып, екінші жерге қою операциясы.

Қазақша: алып қою операциясы немесе нысанды бір орыннан екінші орынға ауыстыру.

қолды нұсқау — роботтың соңғы атқарушы органы арқылы бағыт көрсету.

Ағылш.: pointing gesture / indication.

жетек — буынды қозғалысқа келтіретін атқарушы механизм.

Ағылш.: actuator / drive.

қозғалтқыш — механикалық энергия өндіретін жетек бөлігі.

Ағылш.: motor.

BLDC қозғалтқыш — щеткасыз тұрақты ток қозғалтқышы.

Ағылш.: Brushless DC motor.

щеткалы қозғалтқыш — коллекторы мен щеткасы бар тұрақты ток қозғалтқышы.

Ағылш.: brushed motor.

энкодер — бұрыштық орын мен жылдамдықты өлшейтін датчик.

Ағылш.: encoder.

червякті редуктор — бұрандалы беріліске негізделген редуктор.

Ағылш.: worm gearbox.

толқынды редуктор — жоғары редукция коэффициентін беретін арнайы дәл редуктор.

Ағылш.: harmonic drive / wave reducer.

аралық домалау денелері бар толқынды редуктор — роликтер арқылы күш берілетін толқынды редуктор түрі.

Қысқ.: АДДБТР.

роликті нұсқа — редуктордағы жанасу роликтер арқылы жүзеге асатын конструкция.

Ағылш.: roller-type version.

эксцентрик — айналғанда ығысу туғызатын механизм элементі.

Ағылш.: eccentric.

сепаратор — домалау денелерін бағыттап ұстап тұратын элемент.

Ағылш.: cage / separator.

венец — редуктордағы сақина тәрізді тісті не профильді элемент.

Ағылш.: ring gear / ring.

тірек элементтері — мойынтірек, корпус және тіреуіш бөлшектер.

Ағылш.: support elements.

мойынтірек — айналу үйкелісін азайтатын тірек элементі.

Ағылш.: bearing.

3D нұсқа — бөлшек не тораптың кеңістіктік үлгісі.

Ағылш.: 3D model / 3D version.

эксперименттік прототип — сынаққа арналған физикалық үлгі.

Ағылш.: experimental prototype.

PLA пластигі — 3D басып шығаруда жиі қолданылатын полимер.

Ағылш.: PLA.

Пуассон коэффициенті — бойлық және көлденең деформациялардың қатынасы.

Ағылш.: Poisson's ratio.

созылуға беріктік шегі — созылу кезінде материал шыдайтын шекті кернеу.

Ағылш.: tensile strength.

инерциялық өлшеуіш блок — үдеу, бұрыштық жылдамдық және кейде магнит өрісін өлшейтін сенсорлық блок.

Ағылш.: IMU, inertial measurement unit.

акселерометр — сызықтық үдеуді өлшейтін сенсор.

Ағылш.: accelerometer.

гироскоп — бұрыштық жылдамдықты өлшейтін сенсор.

Ағылш.: gyroscope.

магнитометр — магнит өрісін өлшейтін сенсор.

Ағылш.: magnetometer.

электромиография — бұлшықет белсенділігін электр сигналдары арқылы өлшеу.

Ағылш.: EMG.

электроэнцефалография — мидың электр белсенділігін тіркеу.

Ағылш.: EEG.

био-имитация — адам қозғалысының принциптерін роботқа көшіру.

Ағылш.: bio-imitation / biomimetic motion.

интуитивті басқару — операторға табиғи сезілетін басқару тәсілі.

Ағылш.: intuitive control.

MATLAB — сандық есептеулер мен модельдеуге арналған бағдарлама ортасы.

Ағылш.: MATLAB.

Simulink — динамикалық жүйелерді блок-схема түрінде модельдеуге арналған MATLAB құралы.

Ағылш.: Simulink.

SolidWorks — 3D жобалау және механикалық талдау бағдарламасы.

Ағылш.: SolidWorks.

GUI — пайдаланушының графикалық интерфейсі.

Ағылш.: Graphical User Interface.

Рунге–Кутта 4-реттік әдісі — дифференциалдық теңдеулерді сандық интегралдау әдісі.

Ағылш.: fourth-order Runge–Kutta, RK4.

сандық интегралдау — дифференциалдық теңдеулерді уақыт бойынша жуық есептеу.

Ағылш.: numerical integration.

сандық дифференциация — туындыны жуық сандық тәсілмен табу.

Ағылш.: numerical differentiation.

қысқартулар

6-DOF — алты еркіндік дәрежесі.

D–H — Денавит–Хартенберг.

СТС — есептелген моментті басқару.

PD — пропорционалды-дифференциалды реттегіш.

PID — пропорционалды-интегралды-дифференциалды реттегіш.

IMU — инерциялық өлшеуіш блок.

EMG — электромиография.

EEG — электроэнцефалография.

F/T sensor — күш-момент датчигі.

PTP — нүктеден нүктеге траектория.

LIN — сызықтық Декарттық траектория.

LSPB — сызықтық сегмент пен параболалық үйлестіру әдісі.

APF — жасанды потенциалдық өрістер әдісі.

PRM — ықтималдық жол карталары әдісі.

RRT — жылдам зерттелетін кездейсоқ ағаштар әдісі.

SLERP — сфералық сызықтық интерполяция.

RK4 — Рунге–Кутта 4-реттік әдісі.

BLDC — щеткасыз тұрақты ток қозғалтқышы.

GUI — графикалық пайдаланушы интерфейсі.

COM — масса центрі.

Негізгі математикалық белгілеулер

q — буын бұрыштарының векторы.

$\dot{q}$ — буын жылдамдықтарының векторы.

$\ddot{q}$ — буын үдеулерінің векторы.

q_d — қалаулы буын траекториясы.

$\dot{q}_d$ — қалаулы буын жылдамдығы.

$\ddot{q}_d$ — қалаулы буын үдеуі.

e — траекторияны қадағалау қатесі.

$\dot{e}$ — қателік жылдамдығы.

$\ddot{e}$ — қателік үдеуі.

X — соңғы атқарушы органның нақты Декарттық қалпы.

X_d — соңғы атқарушы органның қалаулы қалпы.

E — Декарттық кеңістіктегі позициялық қате.

$M(q)$ — буындық кеңістіктегі масса-инерция матрицасы.

$C(q, \dot{q})$ — Кориолис және центрден тепкіш мүшелер матрицасы.

$G(q)$ — гравитациялық моменттер векторы.

$F(\dot{q})$ — үйкеліс векторы.

τ — буындарға әсер ететін басқарушы моменттер.

$J(q)$ — Якобиан матрицасы.

J_v — сызықтық Якобиан.

J_ω — бұрыштық Якобиан.

M_d — мақсатты импеданс массасы.

B_d — мақсатты бәсеңдету матрицасы.

K_d — мақсатты қаттылық матрицасы.

F_{ext} — сыртқы күштер мен моменттер векторы.

K_p — пропорционалдық күшейту матрицасы.

K_v — дифференциалдық күшейту матрицасы.

K_i — интегралдық күшейту матрицасы.

$\Lambda(X)$ — Декарттық кеңістіктегі инерция матрицасы.

$\mu(X, \dot{X})$ — Декарттық кеңістіктегі Кориолис және центрден тепкіш әсерлер матрицасы.

$F_g(X)$ — Декарттық кеңістіктегі гравитациялық әсерлер векторы.

F_c — басқарушы күштер мен моменттер векторы.

ω_n — меншікті жиілік.

ζ — өшу коэффициенті.

Δq_i — i -ші буынның орын ауыстыру шамасы.

T_i — i -ші буын үшін минимал қозғалыс уақыты.

T_{total} — синхрондалған жалпы қозғалыс уақыты.

Δt — интерполяция циклі немесе уақыт қадамы.

s — нормаланған уақыт.

Ω — екі кватернион арасындағы бұрыш.

Кіріспе

Зерттеу тақырыбының өзектілігі

Осы диссертацияның кіріспесін “Гуманоид робот” сөзімен бастағым келіп отыр. Неге? Себебі, робот деген сөз ең бірінші чех жазушы, драматург Карел Чапектің «Россумның әмбебап роботтары» деген пьесасында «механикалық жұмысшы» деген сөздің орнына қолданылады. Нақтырақ айтқанда қазіргі кездегідей металдан жасалған роботтар секілді емес биохимиялық жолмен жасалған жасанды адам деп кездеседі, яғни гуманоид дегенді білдіреді [1]. Енді нақты чех тіліндегі «robota» деген сөзді аударсақ ауыр жұмыс, құлдық еңбек, мәжбүрлі жұмыс және қара жұмысшының еңбегі деген мағыналарды берді. Қысқаша айтқанда адамға зиян немесе қиын жұмыстарды білдіреді. Менің де осы диссертациямда адамдарды осындай жұмыстардан ауыстыратын және ең бастысы көмектесетін гуманоид робот қолын жасау. Неге менің диссертация тақырыбым нақты гуманоид робот-қолы туралы екенін біліп отырғандарыңыздай адам барлық дерлік жұмыстарды қолмен жасайды, мысалы дәнекерлеу, сурет салу, заттарды алу және қою, құрастыру және т.б. Менің жеке ойым бойынша гуманоид тақырыбы ең басында адамдар үшін қандай өзекті болды қазіргі уақытта да өте өзекті және болашақта да өзекті болып қала бермек. Сол адам қолымен жасалатын өте көп салалардың ішінде осы зерттеу нақты екі мәселені шешуге бағытталған.

Бірінші мақсат қашықтан басқаруға технологияларына негізделген гуманоид роботта қолдану. Осыған енді тереңірек тоқталсақ. Өнеркәсіптік роботтар көптеген салаларда: машина жасауда, әскери-ғарыш өнеркәсібінде, ауыл шаруашылығында және т.б. ұзақ уақыт бойы қолданылып келеді. 1990 жылдардан бастап, адамдарға пайдалы жұмыс жасайтын, бірақ өндірістік автоматика міндеттерін орындамайтын қызмет көрсету роботтары, мысалы, тазалаушы роботтар, гид роботтар, кеңесші роботтар пайда бола бастады. Қызмет көрсету роботтарының дамуы, өз кезегінде, адамдармен әлеуметтік өзара әрекеттесуге қабілетті әлеуметтік роботтардың пайда болуына әкелді [2-6], мысалы, көмекші роботтар, серіктес роботтар, реабилитацияға арналған роботтар.

Көмекші-роботтар негізгі функцияларды орындаумен қатар, көмек көрсету үшін адаммен әлеуметтік өзара әрекеттесуді жүзеге асырады. Мысалы, "i-robot" компаниясының "AVA" гуманоидты роботы [7] үйді тазалаудан басқа, иесінің денсаулығы туралы ақпарат жинайды және бұл мәліметтерді емдеуші дәрігерге жібереді, Азия Түзету Форумы тобының бақылаушы-роботы [8] сотталғандарды бақылаудан басқа, сотталғандар мен бақылаушылар арасында делдалдық етеді, Octavia гуманоидты роботы [9] өрт сөндіру кезінде өрт сөндірушілермен өзара әрекеттеседі, Robonaut 2 роботы [10] NASA халықаралық ғарыш станциясында жұмыс істейді, ғарышкерлермен өзара әрекеттеседі. Реабилитацияға арналған роботтар, әсіресе қарт адамдардың психикалық денсаулығын қолдау үшін қарым-қатынас арқылы көмектеседі, сонымен қатар мүмкіндігі шектеулі жандарды қоғамдық өмірге (жұмыс, оқу, қарым-қатынас) тартады. Адамдарды және қоршаған ортаны сезетін, сипаған

кезде қуаныш білдіретін Paro итбалық роботы [11] кеңінен танымал. Бұл егде жастағы адамдар мен ауруханадағы науқастарға тыныштандыратын әсер етеді және оң эмоциялар тудырады.

Халықаралық еңбек ұйымының мәліметтері бойынша, біздің планетамызда шамамен 650 миллион адам мүгедек. Кейбір елдерде мүгедектердің 80%-ға дейінгі бөлігі жұмыссыз. Бұл үлкен проблема, себебі бұл санаттағы адамдар әлеуметтік өмірден қол үзеді.

Бұл мәселені шешудің бір бағыты – қашықтан басқарылатын әлеуметтік роботтардың көмегімен мүмкіндігі шектеулі жандарды жұмысқа және қоғамдық өмірге тарту. Мұндай әлеуметтік роботтарды операторлар, яғни үйде отырған мүмкіндігі шектеулі жандар қашықтан басқара отырып, сол мүмкіндігі шектеулі жандарды жұмысқа және қоғамдық өмірге тартса, екінші жағынан, роботтардың құнын төмендетеді. Офлайн, яғни автономды режимінде жұмыс істейтін роботтардың негізгі құны олардың басқару жүйелері екені белгілі.

Екінші мақсат инсульттен кейінгі реабилитация тиімділігін арттыруға арналған гуманоид робот қолын жасау. Инсульт әлемдегі екінші ең көп өлім себебі және ересектердегі мүгедектіктің негізгі себебі болып табылады. Дүниежүзілік денсаулық сақтау ұйымының деректері бойынша, жыл сайын шамамен 15 миллион адам инсультке ұшырайды, олардың 5 миллионы қайтыс болады, ал 5 миллионы тұрақты мүгедектікке ұшырайды. Қазақстанда жыл сайын шамамен 40 000 инсульт жағдайы тіркеледі, олардың 70%-ы жоғарғы аяқ-қолдың қозғалыс функциясының бұзылуына әкеледі. Инсульттен кейінгі қалпына келтіру ұзақ, еңбекті көп қажет ететін және қымбат процесс болып табылады. Дәстүрлі физиотерапия тәжірибелі терапевттердің қол жұмысына негізделген, бұл келесі проблемаларға әкеледі: маманның жетіспеушілігі, субъективтілік және қайталанбаушылық, дәстүрлі терапияның құны жоғары, шалғай аудандарда тұратын науқастар сапалы реабилитацияға қол жеткізе алмайды. Реабилитациялық робототехника, оның ішінде адаптивті робот қолдар, терапияның қарқындылығын, дәлдігін және қолжетімділігін арттыруға, сондай-ақ науқастың мотивациясын жоғарылатуға зор мүмкіндіктер береді. Науқастың жағдайына бейімделетін, пассивті, белсенді-көмекші және кедергі режимдерінде жұмыс істей алатын роботтандырылған жүйелерді құру – медициналық робототехникадағы өзекті бағыт.

Осылайша, бір платформада инсульттен кейінгі реабилитация және қашықтан басқару функцияларын біріктіретін екі мақсатты гуманоид робот қолын жобалау – бұл денсаулық сақтау және әлеуметтік қызмет көрсету салаларындағы маңызды мәселелерді шешуге бағытталған, технологиялық тұрғыдан күрделі және практикалық сұранысқа ие өзекті ғылыми-техникалық міндет болып табылады.

Зерттеу пәні – Зерттеу пәні ретінде қашықтан басқару және инсульттен кейінгі оңалту міндеттеріне арналған екі мақсатты 6-DOF гуманоид робот қолының кинематикалық, динамикалық және басқару ерекшеліктері қарастырылады. Атап айтқанда, зерттеу пәніне робот қолының D–H параметрлері негізіндегі кинематикалық моделі, Эйлер–Лагранж әдісі арқылы

алынған динамикалық моделі, траекторияны жоспарлау алгоритмдері, сондай-ақ соңғы атқарушы органның дәл, қауіпсіз және бейімделгіш қозғалысын қамтамасыз ететін есептелген моментті басқару және импеданстық басқару әдістері жатады.

Зерттеу пәні шеңберінде гуманоид робот қолының бос кеңістіктегі қозғалысы, адаммен және қоршаған ортамен физикалық өзара әрекеттесуі, жұмыс кеңістігі, сингулярлық конфигурациялары, сондай-ақ оңалту және қашықтан басқару режимдеріндегі функционалдық мүмкіндіктері зерттеледі.

Диссертациялық жұмыстың негізгі мақсаты – Қашықтан басқару және инсульттен кейінгі оңалту міндеттеріне арналған екі мақсатты 6-DOF гуманоид робот қолының кинематикалық, динамикалық және басқару модельдерін әзірлеу, траекторияны жоспарлау әдістерін негіздеу, сондай-ақ соңғы атқарушы органның дәл, қауіпсіз және бейімделгіш қозғалысын қамтамасыз ететін тиімді басқару алгоритмдерін ұсыну.

Осы мақсатқа жету үшін келесі міндеттер қойылды:

1. Гуманоид робот қолдар, оңалту робототехникасы, қашықтан басқару, траекторияны жоспарлау және адам–робот өзара әрекеттесуі салаларындағы ғылыми әдебиеттерге талдау жүргізу.
2. Екі мақсатты 6-DOF гуманоид робот қолының құрылымдық сұлбасын негіздеу және оның қолданылу ерекшеліктерін анықтау. Робот қолының D–H параметрлері негізінде тура және кері кинематика есептерін шығару.
3. Робот қолының ерекше жағдайларын және Якобиан матрицасын талдау.
4. Эйлер–Лагранж әдісі негізінде робот қолының динамикалық моделін құру және оның негізгі динамикалық параметрлерін анықтау.
5. SolidWorks және MATLAB орталарында робот қолының 3D моделі мен сандық модельдерін әзірлеу және олардың көмегімен кинематика мен динамика есептеулерін тексеру.
6. Робот қолы үшін сызықтық, кубтық, бесінші дәрежелі полиномдар, RTP, LIN және адаптивті траекторияны жоспарлау әдістерін зерттеп, салыстырмалы талдау жүргізу.
7. Бос кеңістіктегі қозғалыс үшін есептелген моментті басқару (computed-torque control) әдісін әзірлеу және оның қадағалау дәлдігін негіздеу.
8. Адаммен тікелей физикалық өзара әрекеттесу кезінде қауіпсіздік пен икемділікті қамтамасыз ету үшін импеданстық басқару әдісін әзірлеу.
9. Оңалту режимдеріне сәйкес импеданс параметрлерін бейімдеу қағидаларын ұсыну.
10. Қашықтан басқару және оңалту сценарийлері үшін басқару әдістерінің тиімділігін модельдік мысалдар мен сандық симуляциялар арқылы бағалау.

11. Екі мақсатты гуманоид робот қолды практикалық қолдануға арналған ұсыныстар мен инженерлік шешімдер әзірлеу.

Жұмыстың ғылыми жаңалығы

Диссертациялық жұмыстың ғылыми жаңалығы келесі негізгі нәтижелермен анықталады:

1. Қашықтан басқару және инсульттен кейінгі оңалту міндеттерін бір роботтық платформа аясында біріктіруге арналған екі мақсатты 6-DOF гуманоид робот қолының тұжырымдамасы ұсынылды.
2. Екі мақсатты гуманоид робот қолы үшін D–Н параметрлері негізінде кинематикалық модель, оның ішінде тура кинематика, кері кинематика, жұмыс кеңістігі және сингулярлық конфигурациялар жүйелі түрде талданды.
3. Эйлер–Лагранж әдісі негізінде робот қолының динамикалық моделі құрастырылып, масса-инерция матрицасы, Кориолис және центрден тепкіш әсерлер, гравитациялық және үйкелістік мүшелерді қамтитын толық қозғалыс теңдеуі алынды.
4. Гуманоид робот қолы үшін траекторияны жоспарлаудың сызықтық, кубтық, бесінші дәрежелі полиномдық, PTP, LIN және адаптивті әдістеріне салыстырмалы талдау жүргізіліп, әр қолданба үшін тиімді қолданылу аймақтары негізделді.
5. Бос кеңістіктегі дәл қозғалыс үшін есептелген моментті басқару (computed-torque control) әдісі ұсынылып, оның көмегімен бейсызық динамиканы өтемдеу арқылы жүйені сызықтық түрге келтіру мүмкіндігі көрсетілді.
6. Адаммен тікелей физикалық өзара әрекеттесу жағдайында қауіпсіздік пен икемділікті қамтамасыз ету үшін импеданстық басқару әдісі негізделді және оның гуманоид робот қолының соңғы атқарушы органына әсер ететін сыртқы күштерге бейімделу қабілеті көрсетілді.
7. Оңалту режимдеріне сәйкес импеданс параметрлерін, яғни виртуалды масса, бәсеңдету және қатаңдық коэффициенттерін бейімдеп таңдаудың қағидалары ұсынылды.
8. MATLAB және SolidWorks орталары негізінде робот қолының кинематикасы, динамикасы және басқару алгоритмдерін тексеруге арналған сандық және 3D модельдер әзірленді.

Зерттеудің теориялық маңыздылығы

Зерттеудің теориялық маңыздылығы екі мақсатты 6-DOF гуманоид робот қолының кинематикалық, динамикалық және басқару негіздерін кешенді түрде қарастыруымен анықталады. Жұмыста D–Н параметрлері негізінде робот қолының тура және кері кинематика есептері жүйелі түрде шығарылып, соңғы атқарушы органның кеңістіктегі орны мен бағдарының буындық айнымалылармен байланысы анықталды. Сонымен қатар робот қолының сингулярлық конфигурациялары және Якобиан матрицасы талданды, бұл роботтың қозғалыс мүмкіндіктерін терең түсіндіруге мүмкіндік береді.

Зерттеуде Эйлер–Лагранж әдісі негізінде робот қолының толық динамикалық моделі құрылып, масса-инерция матрицасы, Кориолис және центрден тепкіш әсерлер, гравитациялық және үйкелістік мүшелер ескерілген қозғалыс теңдеулері алынды. Бұл нәтижелер гуманоид робот қолының қозғалысын математикалық тұрғыдан сипаттауға, басқару заңдарын синтездеуге және жүйенің орнықтылығын талдауға теориялық негіз қалайды.

Сондай-ақ жұмыста траекторияны жоспарлаудың сызықтық, кубтық, бесінші дәрежелі полиномдық, РТР, LIN және адаптивті әдістері салыстырмалы түрде зерттеліп, олардың қолданылу шарттары мен шектеулері негізделді. Басқару бөлігінде есептелген моментті басқару және импеданстық басқару әдістерінің теориялық негіздері ашылып, олардың робот қолының әртүрлі жұмыс режимдеріндегі тиімділігі дәлелденді. Осы тұрғыдан алғанда, зерттеу нәтижелері гуманоид робот қолдарын модельдеу, траекторияны жоспарлау және басқару салаларындағы ғылыми-теориялық білім қорын толықтырады.

Зерттеудің практикалық маңыздылығы

Зерттеудің практикалық маңыздылығы ұсынылған нәтижелердің нақты инженерлік және қолданбалы міндеттерді шешуге бағытталуымен сипатталады. Жұмыста екі мақсатты 6-DOF гуманоид робот қолының 3D эксперименттік прототипі әзірленіп, оның механикалық құрылымы, буындарының массалық-инерциялық сипаттамалары және қозғалыс ерекшеліктері анықталды. Бұл нәтижелер робот қолының нақты конструкциясын жобалау, дайындау және жетілдіру үдерісінде тікелей қолданылуы мүмкін.

MATLAB және SolidWorks орталары негізінде құрылған модельдер робот қолының кинематикасын, динамикасын, траекториясын және басқару алгоритмдерін тексеруге мүмкіндік береді. Ұсынылған есептелген моментті басқару әдісі робот қолының бос кеңістіктегі қозғалысында жоғары дәлдікті қамтамасыз ету үшін, ал импеданстық басқару әдісі адаммен немесе қоршаған ортамен жанасу кезіндегі қауіпсіздік пен икемділікті қамтамасыз ету үшін қолданылуы мүмкін. Бұл, әсіресе, консульттен кейінгі оңалтуға арналған роботтық жүйелерді әзірлеуде маңызды.

Сонымен қатар зерттеу нәтижелері қашықтан басқарылатын робот гидтерді, элеуметтік сервистік роботтарды және жоғарғы аяқ-қолды оңалтуға арналған интеллектуалды роботтық құрылғыларды жобалауда пайдалануға жарамды. Траекторияны жоспарлау мен басқаруға қатысты ұсынылған алгоритмдер нақты роботтық жүйелердің бағдарламалық қамтамасыз етуін жасауға негіз бола алады. Осылайша, жұмыстың практикалық нәтижелері робототехника, телеоперация және оңалту робототехникасы салаларында кең қолданбалы мәнге ие.

Қорғауға шығарылатын ғылыми нәтижелер

1. Қашықтан басқару және консульттен кейінгі оңалту міндеттеріне арналған екі мақсатты 6-DOF гуманоид робот қолының құрылымдық-тұжырымдамалық моделі және оны қолданудың функционалдық негіздемесі ұсынылды.

2. D–H параметрлері негізінде гуманоид робот қолының тура және кері кинематика есептері шығарылып, соңғы атқарушы органның кеңістіктегі орны мен бағдарының буын айнымалыларымен байланысын сипаттайтын математикалық модель алынды.
3. Робот қолының сингулярлық конфигурациялары және Якобиан матрицасы талданып, буындық және декарттық кеңістіктердегі кинематикалық байланыстар жүйеленді.
4. Эйлер–Лагранж әдісі негізінде масса-инерция матрицасын, Кориолис және центрден тепкіш әсерлерді, гравитациялық және үйкелістік мүшелерді қамтитын гуманоид робот қолының динамикалық моделі құрылды.
5. Робот қолы үшін траекторияны жоспарлаудың сызықтық, кубтық, бесінші дәрежелі полиномдар, PTP, LIN және адаптивті әдістеріне салыстырмалы талдау жүргізіліп, әрбір қолданба үшін тиімді алгоритмдер негізделді.
6. Бесінші дәрежелі полиномдарға негізделген траекторияны жоспарлау робот қолының қозғалысында C_2 - тегістікті, яғни дірілсіз, тегіс және дәл орындалуды қамтамасыз ететіні дәлелденді.
7. Бос кеңістіктегі қозғалыс үшін есептелген моментті басқару (computed-torque control) әдісі ұсынылып, оның робот қолдың бейсызық динамикасын өтемдеу арқылы қадағалау қателігін азайтатыны және жоғары дәлдікті қамтамасыз ететіні көрсетілді.
8. Адаммен немесе қоршаған ортамен тікелей өзара әрекеттесу жағдайында импеданстық басқару әдісінің қауіпсіздік пен икемділікті қамтамасыз ететіні теориялық және модельдік тұрғыдан негізделді.
9. Оңалту режимдеріне арналған виртуалды масса, бәсеңдету және қатаңдық параметрлерін бейімдеп таңдаудың қағидалары ұсынылып, пассивті, белсенді-көмекші, белсенді-қарсылық және дірілді басу режимдері үшін ұсынылатын параметрлер жүйеленді.
10. MATLAB және SolidWorks орталары негізінде робот қолының кинематикалық, динамикалық және басқару алгоритмдерін тексеруге арналған сандық және 3D модельдер әзірленіп, олардың тиімділігі модельдік мысалдар арқылы көрсетілді.
11. Қашықтан басқару үшін PTP және LIN әдістерінің комбинациясы, ал инсульттен кейінгі оңалту үшін адаптивті траекторияны жоспарлау мен импеданстық басқарудың үйлесімі ең орынды шешім екені негізделді.
12. Қос мақсатты 6-DOF гуманоид робот қолын құруға арналған математикалық, алгоритмдік және инженерлік шешімдер кешені ұсынылды.

Диссертацияның ғылыми ережелерінің, тұжырымдары мен нәтижелерінің дұрыстығы мен негізділігі.

Диссертацияда алынған ғылыми ережелердің, тұжырымдардың және нәтижелердің дұрыстығы мен негізділігі зерттеудің теориялық және әдістемелік базасының жеткіліктілігімен, қолданылған математикалық аппараттың сенімділігімен, модельдеу нәтижелерінің өзара сәйкестігімен және алынған қорытындылардың робототехника саласындағы белгілі ғылыми қағидаларға қайшы келмеуімен қамтамасыз етіледі.

Зерттеудің дұрыстығы, ең алдымен, гуманоид робот қолының кинематикалық және динамикалық модельдерін құруда классикалық және ғылыми ортада кеңінен танылған әдістердің қолданылуымен негізделеді. Атап айтқанда, робот қолының кинематикалық моделін құруда Денавит–Хартенберг параметрлеуі, ал динамикалық моделін алуда Эйлер–Лагранж әдісі пайдаланылды. Бұл әдістер робототехникада көп буынды манипуляторларды сипаттаудың теориялық тұрғыдан орныққан және тәжірибеде дәлелденген тәсілдері болып табылады. Осыған байланысты диссертацияда алынған кинематикалық және динамикалық теңдеулердің ғылыми дұрыстығы жалпы қабылданған теориялық базаға сүйенеді.

Зерттеу нәтижелерінің негізділігі робот қолының тура және кері кинематика есептерін, сингулярлық конфигурацияларын және Якобиан матрицасын талдау арқылы расталады. Алынған тәуелділіктер мен аналитикалық өрнектер MATLAB ортасында сандық тексеруден өткізілді, ал олардың физикалық мағынасы робот қолының геометриялық және қозғалыстық қасиеттерімен сәйкестендірілді. Бұл кинематикалық модельдің дұрыстығын растауға мүмкіндік берді.

Динамикалық модельдің дұрыстығы робот қолының масса-инерция параметрлерін, гравитациялық, Кориолис және центрден тепкіш әсерлерін ескеретін толық қозғалыс теңдеулерін құру арқылы негізделді. Әр буынның массасы, масса центрі және инерция тензоры SolidWorks ортасында анықталып, нақты конструкциялық параметрлермен байланыстырылды. Осылайша, теориялық динамикалық модель абстрактілі түрде емес, эксперименттік прототиптің нақты сипаттамаларына сүйене отырып құрылды. Бұл өз кезегінде алынған нәтижелердің қолданбалы тұрғыдан негізді екенін көрсетеді.

Диссертациядағы траекторияны жоспарлау әдістеріне қатысты тұжырымдардың дұрыстығы олардың теориялық талдауымен және салыстырмалы бағалауымен қамтамасыз етіледі. Сызықтық интерполяция, кубтық полиномдар, бесінші дәрежелі полиномдар, PTP, LIN және адаптивті траекторияны жоспарлау әдістерінің ерекшеліктері жүйелі түрде қарастырылып, олардың артықшылықтары мен шектеулері айқындалды. Әсіресе бесінші дәрежелі полиномдардың C^2 -тегістікті қамтамасыз ететіні және робот қозғалысының тегістігі үшін тиімді екені теориялық түрде негізделді. Бұл қорытындылар робототехникадағы траекторияны жоспарлау теориясының негізгі ережелеріне толық сәйкес келеді.

Басқару жүйелеріне қатысты нәтижелердің дұрыстығы есептелген моментті басқару және импеданстық басқару әдістерінің қатаң математикалық негізде алынуымен дәлелденеді. Есептелген моментті басқару әдісінде

роботтың бейсызық динамикасын өтемдеу арқылы қателік динамикасының сызықтық түрге келтірілетіні көрсетіліп, басқару коэффициенттерін таңдау қағидалары екінші ретті жүйелер теориясы негізінде негізделді. Импеданстық басқару әдісінде роботтың қоршаған ортамен өзара әрекеттесу кезіндегі мінез-құлқы масса–серіппе–бәсеңдеткіш моделі арқылы сипатталып, оның қауіпсіздік пен бейімделгіштікті қамтамасыз ететіні модельдік мысалдар арқылы дәлелденді.

Зерттеу нәтижелерінің сенімділігі MATLAB және SolidWorks орталары негізінде жүргізілген сандық модельдеу мен визуализация нәтижелерімен расталады. Қозғалыс траекториялары, буын бұрыштарының уақыт бойынша өзгеруі, басқарушы моменттер, соңғы атқарушы органның кеңістіктегі орны және жанасу кезіндегі күштік әсерлер талданып, ұсынылған алгоритмдердің жұмыс қабілеттілігі көрсетілді. Модельдеу нәтижелерінің теориялық күтілетін заңдылықтармен сәйкес келуі диссертациядағы негізгі тұжырымдардың дұрыстығын қосымша дәлелдейді.

Сонымен қатар диссертацияның ғылыми нәтижелерінің негізділігі олардың нақты қолданбалық міндеттермен байланыстырылуымен де сипатталады. Ұсынылған әдістер қашықтан басқару және инсульттен кейінгі оңалту сценарийлері үшін жеке-жеке қарастырылып, әрқайсысы үшін тиімді басқару және траекторияны жоспарлау тәсілдері таңдалды. Бұл диссертациядағы тұжырымдардың тек теориялық қана емес, практикалық мәнге де ие екенін көрсетеді.

Осылайша, диссертацияның ғылыми ережелерінің, тұжырымдары мен нәтижелерінің дұрыстығы мен негізділігі:

- классикалық және мойындалған математикалық әдістерді қолданумен;
- алынған модельдердің өзара логикалық және физикалық сәйкестігімен;
- сандық модельдеу нәтижелерімен;
- нақты инженерлік параметрлерді пайдаланумен;
- робототехника саласындағы ғылыми теориялармен үйлесімділігімен;
- және ұсынылған шешімдердің практикалық міндеттерге сәйкестігімен қамтамасыз етіледі.

Зерттеу жұмысының нәтижелерін апробациялау

Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері мен ережелері келесі халықаралық және республикалық ғылыми-техникалық конференцияларда баяндалды, сондай-ақ беделді ғылыми басылымдарда жарияланды:

Baigunchekov, Z., Cao, M., Li, Q., Amanov, B., Zhangabergen, D., Omarov, B., Rakhmatulla, Z., and Yeerzhati, M., Social Humanoid Robot Ai-Gerim., IEEE 20th Conference on Industrial Electronics and Applications, ICIEA 2025, DOI: 10.1109/ICIEA65512.2025.11148978

Baigunchekov Z., Carbone G., Zhumasheva Z., Amanov B., Zholdassov Y., Tolenov S., Tleukhanov A. Kinematics of the “Ai-Gerim” Robot Arm. Mechanisms and Machine ScienceConference, 2022, DOI: 10.1007/978-3-031-04870-8_2

Ibrayev, S., Amanov, B., Enhancing Orthopedics and Sports Medicine with Lower Limb Exoskeleton Control in Rehabilitation Using Deep Learning-Based

Electromyography Signal Classification. Retos, Open Access, 2024, Vol. 61, pp. 616–625.

Ibrayev, S., Omarov, B., Amanov, B., Momynkulov, Z., Development of a Deep Learning-Enhanced Lower-Limb Exoskeleton Using Electromyography Data for Post-Neurovascular Rehabilitation. Engineered Science, Open Access, 2024, Vol. 31, p. 1269.

Диссертацияның негізгі мазмұны

Диссертация кіріспеден, төрт негізгі тараудан, қорытындыдан, пайдаланылған әдебиеттер тізімінен және қосымшалардан тұрады.

Кіріспеде зерттеу жұмысының өзектілігі негізделеді. Қазіргі таңда гуманоид робот қолдар тек өндірістік міндеттерді орындау үшін ғана емес, сонымен қатар медицина, реабилитация, сервистік робототехника және қашықтан басқару салаларында кеңінен қолданылып келе жатқаны көрсетіледі. Осыған байланысты дәл қозғалу, қауіпсіз өзара әрекеттесу, адаптивті басқару және адам қимылына бейімделу мәселелері ерекше маңызға ие екені айтылады.

Кіріспеде зерттеудің мақсаты, міндеттері, ғылыми жаңалығы, практикалық маңызы, зерттеу нысаны мен пәні анықталады. Негізгі мақсат ретінде қашықтан басқару және инсульттен кейінгі реабилитацияға арналған екі мақсатты 6-DOF гуманоид робот қолды модельдеу, траекторияны жоспарлау әдістерін таңдау және оған сәйкес басқару жүйелерін әзірлеу қойылады.

Бірінші тарауда гуманоид робот қолдардың даму тарихы, олардың қазіргі қолданылу бағыттары және зерттеу тақырыбына қатысты негізгі ғылыми еңбектерге талдау жасалған. Өнеркәсіптік, медициналық және сервистік робот қолдардың эволюциясы қарастырылып, қазіргі зерттеулерде дәлдікпен қатар қауіпсіздік, икемділік және адаммен өзара әрекеттесу сапасы алдыңғы орынға шыққаны көрсетілген.

Реабилитациялық робототехникаға арналған бөлімде инсульттен кейінгі жоғарғы аяқ-қол функцияларын қалпына келтіруге арналған роботтық жүйелер, олардың жұмыс режимдері мен басқару ерекшеліктері қарастырылған. Сонымен қатар қашықтан басқару және телеоперация жүйелерінің теориялық негіздері, күштік кері байланыс және оператор мен робот арасындағы өзара әрекеттесу мәселелері талданған.

Тарауда робот қол траекториясын жоспарлаудың классикалық және заманауи тәсілдері қарастырылып, сызықтық, полиномдық, РТР, LIN және адаптивті әдістердің ерекшеліктері салыстырылған. Әдебиеттерді талдау нәтижесінде қашықтан басқару мен реабилитацияға арналған бір роботтық жүйеде дәл траекториялық басқару мен қауіпсіз күштік өзара әрекеттесуді біріктіру қажеттігі негізделген.

Екінші тарауда 6-DOF гуманоид робот қолдың толық математикалық моделі құрылған. Алдымен робот қолдың геометриялық құрылымы Денавит–Хартенберг параметрлері негізінде сипатталып, тура және кері кинематика есептері шығарылған. Соңғы атқарушы органның кеңістіктегі орны мен бағдары буындық айнымалылармен байланыстырылып, сингулярлық конфигурациялар талданған.

Тарауда Якобиан матрицасы шығарылып, оның буындық және Декарттық кеңістіктер арасындағы жылдамдықтық байланыстарды, сондай-ақ күштерді буын моменттеріне түрлендірудегі рөлі көрсетілген. Бұл нәтижелер робот қолдың қозғалыс мүмкіндіктерін, жұмыс кеңістігін және басқару кезінде туындайтын шектеулерді талдауға негіз болған.

Бұдан кейін робот қолдың динамикалық моделі Эйлер–Лагранж формализмі негізінде алынған. Кинетикалық және потенциалдық энергиялар есептеліп, масса-инерция матрицасы, Кориолис және центрден тепкіш мүшелер, гравитациялық және үйкелістік әсерлер қамтылған толық қозғалыс теңдеуі жазылған. Сонымен қатар SolidWorks ортасында робот қолдың эксперименттік прототипі жобаланып, әр буынның массасы, масса центрі және инерция тензоры анықталған.

Осылайша, тарауда робот қолдың кинематикалық және динамикалық қасиеттерін сипаттайтын толық математикалық аппарат қалыптастырылып, ол кейінгі траекторияны жоспарлау және басқару алгоритмдерін құруға негіз болған.

Үшінші тарауда робот қол үшін траекторияны жоспарлаудың негізгі әдістері жүйелі түрде қарастырылған. Алдымен жол, траектория және қозғалыс профилі ұғымдары нақтыланып, буындық және Декарттық кеңістікте жоспарлаудың айырмашылықтары түсіндірілген. Қозғалыс тегістігі, үздіксіздік деңгейлері және серпіліс ұғымдары талданған.

Тарауда сызықтық интерполяция, кубтық полиномдар және бесінші дәрежелі полиномдар әдістері қарастырылып, олардың қозғалыс тегістігі мен есептеу күрделілігі бойынша салыстырмалы талдауы берілген. Бесінші дәрежелі полиномдардың позиция, жылдамдық және үдеудің толық тегістігін қамтамасыз ететіні көрсетіліп, бұл әдістің робот қолдың дірілсіз және жұмсақ қозғалысын қамтамасыз етудегі тиімділігі негізделген.

Сонымен қатар буындық кеңістіктегі РТР және Декарттық кеңістіктегі LIN траекторияларын жоспарлау әдістері зерттелген. РТР әдісінде барлық буындардың синхронды қозғалысын ұйымдастыру үшін жетекші буын ұғымы қолданылып, ал LIN әдісінде соңғы атқарушы органның түзу сызықты қозғалысын қамтамасыз ету үшін позиция мен бағдардың интерполяциясы және кері кинематика есебі қарастырылған.

Тараудың соңында реабилитацияға арналған адаптивті траекторияны жоспарлау тәсілі негізделген. Импеданстық басқару принципіне сүйенген бұл тәсіл робот қолдың сыртқы күшке бейімделіп, науқаспен қауіпсіз әрі икемді өзара әрекеттесуін қамтамасыз етуге бағытталған. Тарау қорытындысында қашықтан басқару үшін РТР және LIN әдістерінің үйлесімі, ал инсульттен кейінгі реабилитация үшін адаптивті траекторияны жоспарлау әдісі ең қолайлы шешім екені көрсетілген.

Төртінші тарауда робот қолдың басқару жүйелері қарастырылған. Қос мақсатты робот қол үшін екі негізгі тәсіл таңдалған: бос кеңістіктегі дәл қозғалысты қамтамасыз ететін есептелген моментті басқару және адаммен

немесе қоршаған ортамен өзара әрекеттесу кезінде қауіпсіздік пен икемділікті қамтамасыз ететін импеданстық басқару.

Алдымен есептелген моментті басқару әдісінің математикалық негіздері берілген. Робот қолдың бейсызық динамикасын компенсациялау арқылы жүйені сызықтық түрге келтіру мүмкіндігі көрсетіліп, қателік динамикасы мен тұрақтылық шарттары шығарылған. Бұл әдіс робот қолдың берілген траекторияны жоғары дәлдікпен қадағалауына мүмкіндік беретіні негізделген.

Тараудың келесі бөлімдерінде импеданстық басқару қарастырылған. Бұл әдіс робот қолдың тек позициясын ғана емес, сонымен қатар қоршаған ортамен күштік өзара әрекеттесуін реттеуге мүмкіндік беретіні көрсетілген. Импеданстық басқарудың математикалық моделі, адмиттанстық және күшке негізделген нұсқалары, сондай-ақ реабилитациялық және телеоперациялық режимдер үшін параметрлерді таңдау қағидалары талданған.

Диссертациялық жұмыста қашықтан басқару және инсульттен кейінгі реабилитацияға арналған екі мақсатты 6-DOF гуманоид робот қолдың математикалық, алгоритмдік және қолданбалы негіздері әзірленді. Робот қолдың кинематикасы мен динамикасы модельденіп, траекторияны жоспарлау әдістері салыстырылды және нақты қолданбалар үшін қолайлы тәсілдер таңдалды. Сонымен қатар есептелген моментті басқару мен импеданстық басқару әдістері негізделіп, олардың робот қолдың екі түрлі жұмыс режимінде тиімді қолданылатыны көрсетілді.

Жұмыс нәтижелері робот қолдың бос кеңістіктегі дәл қозғалысын, Декарттық кеңістіктегі бағытталған қозғалысын және адаммен қауіпсіз физикалық өзара әрекеттесуін қамтамасыз етуге болатынын көрсетті. Осылайша, диссертацияда ұсынылған шешімдер қос мақсатты гуманоид робот қолды құруға арналған біртұтас ғылыми және инженерлік негіз қалыптастырады.

1. Әдебиеттерге шолу

Бұл тарауда гуманоид робот-қолдар, реабилитациялық робототехника, қашықтан басқару жүйелері, манипуляторлардың кинематикасы мен динамикасы, траекторияны жоспарлау және адам қимылын тану салаларындағы ғылыми-техникалық әдебиеттерге, ғылыми мақалалар мен заманауи зерттеулерге терең талдау жасалды. Шолудың мақсаты – осы салалардағы негізгі тұжырымдамаларды, жетістіктерді, шешілмеген мәселелерді анықтап, осы диссертациялық жұмыстың ғылыми контекстін негіздеу.

1.1. Гуманоид роботтар. Гуманоид робот қолының кинематикасы және динамикасы

Гуманоидты роботтар — адам денесінің құрылымы мен функционалдық мүмкіндіктерін имитациялауға арналған роботтық жүйелер. Бұл роботтар адамның қозғалысына, мінез-құлқына және өзара әрекеттесу мүмкіндіктеріне ұқсас етіп жасағандықтан, оларды әртүрлі салада қолдануға мүмкіндік береді. Гуманоидты роботтардың негізгі мақсаты - адамдарға арналған ортада қозғалу және тапсырмаларды орындау, адамға бағытталған жағдайларға біртіндеп роботтарды интеграциялау. Бұл бөлімде гуманоидты роботтардың анықтамасы, сипаттамалары және маңызы қарастырылады. Ол гуманоид роботтар заттарды ұстаудан бастап нақты қозғалыстарға дейін күрделі манипуляцияларды орындай алатын қолдарға ие. Жетілдірілген гуманоидты Роботтар қоршаған ортаны тиімді қабылдауға және онымен өзара әрекеттесуге мүмкіндік беретін көру, есту және жанасу сияқты адам сезімдеріне ұқсас сенсорлармен жабдықталған. Жасанды интеллект арқылы бұл роботтар адамның командаларын түсініп, оларға жауап бере алады, тәжірибелер барысында үйренеді және автономды шешім қабылдай алады.

Гуманоидты Роботтар тұжырымдамасы ежелгі мифтер мен ерте автоматтардан бастау алады. Леонардо да Винчи жасаған алғашқы механикалық мүсіншелер қазіргі гуманоидтық роботтарға жол ашты. 20 ғасырда есептеу техникасы мен робототехниканың пайда болуымен айтарлықтай прогресс болды. Үлкен өзгеріс кезеңіне 1970 жылдары Васада университетінің WABOT-1 және 2000 жылдардың басында Honda компаниясының ASIMO дамуы кіреді. Бүгінгі таңда Boston Dynamics Atlas және SoftBank Robotics ' Pepper сияқты гуманоидты роботтар робототехника саласындағы зерттеулердің шыңы болып табылады.

Гуманоидты роботтардағы қолдың динамикасы мен қолын басқару оның функционалдығы мен әмбебаптығы үшін өте маңызды. Бұл бөлімде қолдың динамикасы мен бақылауын түсіну мен игерудің маңыздылығын келсіндей:

1. гуманоидты роботтың ұсақ компоненттерді жинау немесе нәзік заттарды өңдеу сияқты дәл және нәзік тапсырмаларды орындау қабілеті оның қолын басқаруға байланысты.
2. робот қолын тиімді басқару адамдармен бірлесіп жұмыс істеуге және тұтынушыларға қызмет көрсетуге қауіпсіз және интуитивті өзара әрекеттесуді қамтамасыз етеді.

3. қолдың қозғалысы роботтың жалпы тұрақтылығына әсер етеді. Құлаудың алдын алу және тегіс және үйлестірілген қозғалыстарды қамтамасыз ету үшін дұрыс динамикалық бақылау қажет.
4. динамикалық орта мен күтпеген толқулар тепе-теңдікті сақтау және тапсырмаларды сенімді орындау үшін адаптивті басқару стратегияларын қажет етеді.
5. тиімді басқару стратегиялары батареямен жұмыс істейтін роботтардың энергияны тұтынуды азайта отырып роботтың жұмыс уақытын ұзартады.
6. басқаруды оңтайландыру арқылы жетектерге қажетсіз жүктемені азайту механикалық компоненттердің қызмет ету мерзімін ұзартады.

Гуманоид робот қолының тарихы мен эволюциясы

Ертедегі автоматтар ежелгі өркениеттер жасаған қарапайым механикалық құрылғылар болды. Көрнекті мысалдарға Грек инженері Александрия батыры жасаған автоматтандырылған мүсіндер мен құрылғылар және ежелгі Қытайдағы ұқсас туындылар жатады. Орта ғасырларда еуропалық өнертапқыштар діни және ойын-сауық мақсатында жиі қолданылатын күрделі сағаттар мен автоматтар жасады.

Өнеркәсіптік революция машина жасау мен автоматтандыруда айтарлықтай прогреске әкелді. Алғашқы механикалық қолдар өндірісте қайталанатын тапсырмаларды орындауға арналып жасалды және телебасқару тұжырымдамасы пайда болды, бұл адам операторларына қашықтықтан және автоматтандырылған басқарудың негізін қалап, механикалық манипуляторларды қашықтықтан басқаруға мүмкіндік берді.

XX ғасырдың ортасынан бастап заманауи робототехниканың дүниеге келуі десек болады. Себебі келесі роботтар жасалды:

- Джордж Девол мен Джозеф Энгельбергер 1950 жылдары алғашқы Unimate өнеркәсіптік роботын жасады. Unimate General Motors зауыттарында дәнекерлеу және өңдеу сияқты тапсырмалар үшін пайдаланылды, бұл өнеркәсіптік автоматтандыруда робот қолдарды қолданудың бастамасы болды.

- 1980 жылдары NASA Space Shuttle бағдарлама RMS әзірледі. Canadarm ғарышта робот қолдың әлеуетін көрсете отырып, спутниктерді орналастыру мен қызмет көрсетуде шешуші рөл атқарды.

XX ғасырдың аяғына қарай басқару және ептілік жағынан жақсы жетістіктер жасалды. Олардың ішінен айта кететін Unimation әзірлеген және автомобиль өнеркәсібінде кеңінен қолданылатын PUMA роботы роботтық манипуляторлардың болашақ дизайнына әсер ететін дәлдік пен бейімделгіштікті көрсетті. Және 1990 жылдардың аяғында енгізілген Да Винчи жүйесі минималды инвазивті хирургияда төңкеріс жасап, хирургтарға роботты манипуляторлар арқылы дәлдік пен басқару жақсартылды.

XXI ғасырдың басында келесі салаларда жасанды интеллекттің функционалдығы мен интеграциясы артты.

1. Қызмет көрсету саласында гуманоидты роботтарды қолданыла бастады. Ол роботтар:

- 2000 жылы енгізілген Honda' s ASIMO күрделі тапсырмаларды орындауға қабілетті жетілдірілген роботты қолдарымен ерекшеленді. ASIMO-ның дамуы сервистік роботтардағы ептілік пен адамдардың өзара әрекеттесуінің маңыздылығын көрсетті.

- Boston Dynamics әзірлеген Atlas роботы сенімді басқару жүйелері мен динамикалық тепе-теңдікке баса назар аударып, ұтқырлық пен манипуляцияның жетілдірілген мүмкіндіктерін көрсетеді.

2. Бірлескен роботтар (коботтар) олар адаммен бірге қауіпсіз жұмыс істеуге бейімделген роботтарда кеңінен қолданыла бастады. Мысалы, 2000 жылдардың басында бірлескен роботтардың немесе коботтардың пайда болуы айтарлықтай өзгерісті көрсетті. UR сериялары адамдармен қауіпсіз жұмыс істеуге арналған роботтар бағдарламалаудың қарапайымдылығын және әртүрлі тапсырмаларды орындау үшін икемділікті қамтамасыз етті. Осы сияқты роботтарда жасанды интеллект және машиналық оқыту (кеңінен қолданылды. Гуманоидты робот қолдарында жасанды интеллект пен машиналық оқытуды біріктіру динамикалық ортада функционалдылықты жақсартып отырып, уақыт өте келе өнімділікті үйренуге және оңтайландыруға мүмкіндік беретін адаптивті басқару жүйелерін құруға мүмкіндік береді.

Енді соңғы өзгерістермен болашақ тенденциялар туралы жазсақ. Соңғы кезде робот қолында дамып келе жатқан салалардың бірі ол жұмсақ заттармен жұмыс жасау. Жұмсақ заттармен жұмыс жасаудың келесі мақсаттары соңғы жетістіктері ықтимал қосымшалар ауқымын кеңейте отырып, адамдармен және нәзік заттармен қауіпсіз қарым-қатынас жасай алатын икемді материалдардан гуманоид робот қолдарын жасауға бағытталған. Және «Ми-компьютер интерфейстері» (BCI) және жетілдірілген тактильді кері байланыс жүйелері сияқты интуитивті басқару интерфейстерін әзірлеу адам мен роботты манипуляторлар арасындағы өзара әрекеттесуді жақсартып, оларды қолжетімді және тиімді етеді. Жоғары ажыратымдылықтағы (разрешение) камералар мен тактильді сенсорлар сияқты жетілдірілген сенсорларды пайдалану роботтық манипуляторларға қоршаған ортаны дәлірек қабылдауға және бейімделуге мүмкіндік береді, бұл олардың күрделі және құрылымсыз жағдайларда тиімділігін арттырады. Тағы бір маңызды талпыныстардың бірі роботтардың қоршаған ортаға әсерді азайту жөніндегі жаһандық талпыныстар. Ол талпыныстар энергияны және материалдарды тиімді пайдалану саласындағы энергияны үнемдейтін және тұрақты робот қолдарды құруға бағытталған.

Бұл шолуда робот қолдарының тарихы мен эволюциясының негізгі кезеңдерін, ерте механикалық құрылғылардан бастап жасанды интеллектпен біріктірілген жетілдірілген жүйелерге дейін қамтылды. Қазіргі заманғы робот қолдарының дәлдік, басқару және өзара әрекеттесу саласындағы үздіксіз прогреске баса назар аударылды.

Робот-қолдарға әдеби шолу

Адамның қолының күрделі функцияларын қайталауға немесе одан асып түсуге бағытталған бұл гуманоид тәрізді робот қолдар өнеркәсіптік автоматтандырудан бастап, медициналық хирургияға, ғарыштық зерттеулерге және адамдарға көмек көрсетуге дейінгі көптеген салада маңызды технологиялық өзгерістерге ықпал етті. Робот-қолдардың эволюциясы механика, электроника, информатика, жасанды интеллект және материалтану сияқты пәндердің тоғысуының айқын көрінісі болып табылады.

Енді осы бөлімнен бастап әдеби шолудың мақсаты – робот қолдар саласындағы негізгі тұжырымдамаларды, технологияларды, қолданбаларды және болашақ даму бағыттарын жүйелі түрде талдау. Шолу робот қолдардың негізгі принциптерінен бастап, олардың әртүрлі салалардағы нақты қолданбаларына дейінгі кең ауқымды тақырыптарды қамтиды. Келесі алынатын ақпараттар жүзден астам ғылыми мақалаларға, кітаптарға және конференция материалдарына сүйене отырып алынды, сонымен қатар осы арқылы осы саланың қазіргі жағдайы мен болашағы туралы толыққанды көрініс ұсынылады.

Бұл кешенді талдау зерттеушілерге, инженерлерге, студенттерге және осы салаға қызығушылық танытқан кез келген маманға робот-қолдардың көпқырлы әлемі туралы терең түсінік береді деп мүмкіндік береді.

Гуманоид робот қолдың негізгі міндеті – оның соңғы атқарушы органын кеңістіктегі белгілі бір орынға қажетті бағдармен жылжыту. Бұл міндетті орындау үшін роботтың қозғалысын математикалық тұрғыдан сипаттау және басқару қажет. Осы мақсатта кинематика және динамика салалары қолданылады.

Гуманоид робот қолдың кинематикасы

Кинематика – роботтың қозғалысын оны тудыратын күштер мен моменттерді ескермей, геометриялық тұрғыдан зерттейтін механика бөлімі. Робот кинематикасы екі негізгі мәселені шешеді: тура кинематика және кері кинематика.

Тура кинематика – роботтың буындарының белгілі бір бұрыштары немесе сызықтық орын ауыстырулары арқылы оның соңғы атқарушы органның кеңістіктегі орны мен бағдарын анықтау мәселесі. Бұл есептің әдетте бір ғана шешімі болады және оны шешу салыстырмалы түрде оңай. Ең көп таралған әдіс – Денавит–Хартенберг параметрлерін қолдану. D-H әдісі әрбір буынға өзінің координаталар жүйесін бекітіп, олардың арасындағы түрлендіру матрицаларын құруға негізделген.

Кесте 1 - D-H параметрлерінің анықтамалары:

Параметр	Сипаттамасы
a_i	Z_i және Z_{i+1} осьтерінің ортақ перпендикулярларының ұзындығы
α_i	Z_i және Z_{i+1} осьтерінің арасындағы бұрыш (x_i осі бойынша)

Параметр	Сипаттамасы
d_i	x_{i-1} және x_i осьтерінің ортақ перпендикулярларының ұзындығы (z_i осі бойынша)
θ_i	x_{i-1} және x_i осьтерінің арасындағы бұрыш (z_i осі бойынша)

Бір буыннан екіншісіне өтуді сипаттайтын біртекті түрлендіру матрицасы келесідей болады:

$$A_i = \text{Rot}(z, \theta_i) * \text{Trans}(z, d_i) * \text{Trans}(x, a_i) * \text{Rot}(x, \alpha_i)$$

Матрица түрінде:

$$A_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i \cdot s\theta_i & s\alpha_i \cdot s\theta_i & a_i \cdot c\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i \cdot c\theta_i & -s\alpha_i \cdot c\theta_i & a_i \cdot s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Робот қолдың негізгі координаталар жүйесінен соңғы атқарушы органына дейінгі жалпы түрлендіру матрицасы осы матрицаларды көбейту арқылы алынады:

$${}^0A_6 = \prod_{i=1}^6 {}^{i-1}A_i = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 \cdot {}^5A_6 \quad (1.2)$$

Тура кинематика есебі роботтың конфигурациялық кеңістігінен оның жұмыс кеңістігіне сәйкестікті орнатады.

Кері кинематика – соңғы атқарушы органның кеңістіктегі қажетті орны мен бағдары бойынша роботтың буындарының сәйкес бұрыштарын анықтау мәселесі. Бұл есеп тура кинематикаға қарағанда әлдеқайда күрделі, себебі оның шешімі болмауы, бірнеше шешімі болуы немесе бірегей шешімі болуы мүмкін. Кері кинематиканы шешудің аналитикалық және сандық әдістері бар. Аналитикалық әдістер роботтың геометриясына негізделген теңдеулерді шешуге тырысады және барлық мүмкін шешімдерді таба алады, бірақ олар тек қарапайым құрылымды роботтар үшін ғана қолданылады. Сандық әдістер (мысалы, Якобиан матрицасының инверсиясы немесе оңтайландыру алгоритмдері) күрделі роботтар үшін қолданылады, бірақ олар бір шешімге жинақталуы және есептеу тұрғысынан ауыр болуы мүмкін.

Гуманоид робот қолдың жұмыс кеңістігі және сингулярлық жағдайлары.

Жұмыс кеңістігі – роботтың соңғы атқарушы органы жете алатын барлық нүктелердің жиынтығы. Жұмыс кеңістігін талдау роботтың белгілі бір тапсырманы орындай алу қабілетін анықтау үшін маңызды. Ол қолжетімді жұмыс кеңістігі және епті жұмыс кеңістігі (dexterous workspace) болып

бөлінеді. Қолжетімді жұмыс кеңістігі – соңғы атқарушы орган кем дегенде бір бағдармен жете алатын нүктелер жиыны болса, епті жұмыс кеңістігі – соңғы атқарушы орган кез келген бағдармен жете алатын нүктелер жиыны.

Сингулярлық – роботтың белгілі бір конфигурацияларында оның бір немесе бірнеше еркіндік дәрежесін жоғалтатын жағдай. сингулярлық конфигурацияларда робот белгілі бір бағыттарда қозғала алмайды немесе оның буындарының жылдамдығы шексіз үлкен болуы мүмкін. Бұл роботтың басқарылуын жоғалтуына және құрылымдық зақымдануына әкелуі мүмкін. Сингулярлықты талдау Якобиан матрицасының детерминантын нөлге теңестіру арқылы жүзеге асырылады. Якобиан матрицасы буын жылдамдықтары ($\dot{q}$) мен Декарттық жылдамдықтар ($\dot{x}$) арасындағы байланысты орнатады:

$$\dot{x} = J(q)\dot{q} \quad (1.3)$$

Егер $\det(J(q)) = 0$ болса, робот сингулярлық конфигурацияда болады. Сингулярлықтан аулақ болу траекторияны жоспарлаудағы маңызды мәселе болып табылады [12].

Динамика

Енді робот қолының динамикасына шолу жасасақ. Динамика күштер мен моменттерді және олардың қозғалысқа әсерін зерттеуді білдіреді. Робот қолының динамикасы роботтың жетектері мен буындарының қозғалыс жасау арқылы өзара әрекеттесуін қамтиды. Динамикалық талдау инерция, үйкеліс және сыртқы күштер сияқты факторларды ескере отырып, әртүрлі жағдайларда гуманоид робот қолының әрекетін болжауға көмектеседі.

Динамикалық модельдеу тиімді басқару жүйелерін дамыту үшін өте маңызды. Дәл динамикалық модельдер роботтың қозғалысын дәл басқаруға мүмкіндік береді, бұл бірқалыпты және тұрақты жұмыс істеуге мүмкіндік береді. Динамикалық модельдер физикалық роботтарға енгізілмес бұрын басқару алгоритмдерін модельдеуге және сынауға көмектеседі, уақыт пен ресурстарды үнемдейді. Динамиканы түсіну жоғары жылдамдықты, дәлдікті және сенімділікті қажет ететін тапсырмаларда робот қолының жұмысын оңтайландыру үшін маңызды.

Кинематика осы қозғалысты тудыратын күштерді ескермей объектілердің қозғалысын қарастырады. Ол позиция, жылдамдық және үдеу сияқты қозғалыстың геометриялық аспектілерін қамтиды. Кинематикалық талдау робот қолдың қозғалыс траекториясын анықтау және роботтың қолжетімділігі мен жұмыс кеңістігіне қатысты мәселелерді шешу үшін қолданылады. Ал динамика күштер мен моменттерді және олардың қозғалысқа әсерін зерттеуді қамтиды. Бұл қозғалыс пен оны тудыратын күштер арасындағы байланысты түсіну міндетті болып табылады. Динамикалық талдау робот қолының массасын, инерциясын және басқа физикалық қасиеттерін ескере отырып, қажетті қозғалыстар жасау үшін қажетті күштер мен моменттер туралы түсінік алуға мүмкіндік береді.

Динамика кинематикамен салыстырғанда робот қолдың қозғалысын тереңірек түсінуге мүмкіндік береді. Динамикалық модельдеу роботтың қосымша пайда болатын қиындықтарын шеше алатын басқару жүйелерін дамыту үшін өте маңызды. Кинематиканы да, динамиканы да жан-жақты түсіну робот қолын тиімді жобалау, модельдеу және басқару үшін қажет.

Робот қолының динамикасы роботқа әсер ететін күштер мен моменттер және олардың нәтижесінде пайда болатын қозғалыс арасындағы байланысты сипаттайтын теңдеулермен анықталады. Бұл теңдеулер механиканың негізгі принциптеріне негізделген. Робот динамикасы да екі негізгі мәселені шешеді: тура динамика және кері динамика.

Тура динамика – роботтың буындарына түсірілген күштер мен моменттер бойынша оның үдеуін, яғни қозғалысын анықтау. Бұл есеп роботтың қозғалысын симуляциялау үшін қолданылады.

Кері динамика – роботтың белгілі бір траекториямен қозғалуы үшін оның буындарына қандай күштер мен моменттер түсіру керектігін анықтау. Бұл есеп роботты басқару жүйелерін жобалауда негізгі рөл атқарады, себебі ол қажетті басқару сигналын есептеуге мүмкіндік береді.

Динамика шешу әдістерінің бірі Лагранж әдісі ең аз әрекет ету принципіне негізделген және әсіресе күрделі шектеулері мен көптеген еркіндік дәрежелері бар жүйелер үшін пайдалы. Лагранж (L) жүйенің кинетикалық энергиясы (T) мен потенциалдық энергиясы (V) арасындағы айырмашылық ретінде анықталады:

$$L = K - P \quad (1.4)$$

Қозғалыс теңдеулері Эйлер-Лагранж теңдеуінің көмегімен алынады:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.5)$$

q_i - қолдың жалпылама координатасы, $\dot{q}_i$ - жалпылама координатадан уақыт бойынша алынған туындысы, τ_i - i – ші буынға берілген қозғалысты жүзеге асырудағы i – ші буындағы жалпылама күш немесе момент. Лагранж динамикасы робот қолының қозғалыс теңдеулерін шығару үшін қолданылады, нәтижесінде жүйенің әрекетін сипаттайтын дифференциалдық теңдеулер жиынтығы пайда болады. Бұл күрделі өзара әрекеттесулер мен шектеулермен жұмыс істеуді жеңілдетеді.

Екінші әдіс Ньютон-Эйлер тәсілі Ньютонның екінші қозғалыс заңын және Эйлердің айналу теңдеулерін роботтың әрбір буынына қолданатын әдіс. Ол формулалар келесідей:

$$F=ma \quad (1.6)$$

F-күш, m - масса, ал a - үдеу.

$$M = I\alpha + \omega \times (I\omega) \quad (1.7)$$

М-момент, I - инерция тензоры, α - бұрыштық үдеу, ал ω - бұрыштық жылдамдық.

Ньютон-Эйлер тәсілі күштер мен моменттерді негізден соңғы атқарушы органға, содан кейін соңғы атқарушы органнан негізге рекурсивті есептеуді қамтиды. Бұл әдіс есептеу тұрғысынан тиімді және нақты уақыт режимінде басқару қосымшаларында кеңінен қолданылады.

1.2. Реабилитациялық робототехника

Реабилитациялық робототехника – инсульт, жұлын жарақаты немесе басқа неврологиялық аурулардан кейін жоғалған моторлық функцияларды қалпына келтіруге арналған роботтандырылған жүйелерді әзірлеумен айналысатын пәнаралық сала. Бұл технология терапияның қарқындылығын, қайталану дәлдігін және ұзақтығын арттыруға, сондай-ақ науқастың үдеріске белсенді қатысуын ынталандыруға мүмкіндік береді.

Жоғарғы аяқ-қолды оңалтуға арналған роботтар экзоскелет типті және соңғы атқарушы органға негізделген типтегі болып бөлінеді. Экзоскелеттер мысалы, ARMin [13], L-Exos [14] адамның қолына киіліп, әрбір буынның қозғалысын жеке-жеке басқарады, бұл табиғи қозғалыстарды қамтамасыз етеді, бірақ күрделі және қымбат болып келеді. Эффектілі роботтар науқастың қолын немесе білегін арнайы ұстағыш арқылы қозғалтады. Олардың құрылымы қарапайым, бірақ буындарды басқару дәлдігі төменірек болуы мүмкін. 2013 жылы Chang және Kim өздерінің шолуында инсульттен кейінгі оңалтуда робот-ассистентті терапияның клиникалық тиімділігін талдаған.

Заманауи реабилитациялық роботтардың негізгі ерекшелігі – олардың науқастың жағдайына бейімделу қабілеті. Бұл адаптивті басқару стратегиялары арқылы жүзеге асырылады. Ең көп таралған режимдер:

- Пассивті режим - науқас қимыл жасай алмағанда, робот оның қолын алдын ала белгіленген траектория бойынша толықтай өзі қозғайды [15].
- Белсенді-көмекші режим - науқас қимылды бастауға тырысқанда, робот оның ниетін анықтап, тек қажетті мөлшерде ғана көмек көрсетеді. Бұл көбінесе импеданстық басқару арқылы жүзеге асырылады, мұнда роботтың «қаттылығы» науқастың күшіне байланысты өзгереді [16, 17].
- Кедергі режимі - науқастың бұлшықеттерін күшейту үшін робот қозғалысқа белгілі бір мөлшерде кедергі жасайды.

Mohebbi 2020 жылғы және Beckerle et al. 2017 жылғы өз шолуларында реабилитациядағы адам–робот өзара әрекеттесуінің маңыздылығын, әсіресе науқастың ниетін тану және оған сәйкес роботтың әрекетін бейімдеу мәселелерін атап өтеді [18]. Соңғы зерттеулерде биосигналдарды, яғни ЭМГ және ЭЭГ қолдану арқылы науқастың ниетін тікелей анықтауға бағытталған жұмыстар белсенді дамуда [19, 20].

Бұл саладағы негізгі шешілмеген мәселелерге роботтардың құнын төмендету, басқару алгоритмдерін жекелеңдіру (personalization), терапияның ұзақ мерзімді тиімділігін клиникалық дәлелдеу және науқастың психологиялық қабылдауын жақсарту жатады [21].

1.3. Қашықтан басқару немесе телеоперация және тактильді кері байланыс

Телеоперация – бұл оператордың роботты қашықтықтан басқару процесі. Бұл технология қауіпті орталарда, телемедицинада және қызмет көрсету саласында кеңінен қолданылады. Тиімді телеоперация жүйесі операторға «қатысу сезімін» беруі тиіс, яғни оператор өзін роботтың орнында сезінуі керек [22].

Енді басқару архитектурасына тоқталсақ. Телеоперация жүйелері әдетте «жетекші-жетектелуші» архитектурасына негізделеді. Оператор жетекші құрылғыны қозғайды, ал жетектелуші робот оның қимылын қайталайды. Жүйенің тұрақтылығы мен дәлдігін қамтамасыз ету үшін әртүрлі басқару схемалары қолданылады. Ең танымалдарының бірі – екі жақты басқару, мұнда жетекші құрылғыдан жетектелуші роботқа позиция мен жылдамдық сигналы жіберіліп қана қоймай, роботтың сыртқы ортамен әрекеттесу күші туралы ақпарат күш пен момент сигналы операторға кері қайтарылады [23, 24]. Бұл операторға жанасуды сезінуге мүмкіндік береді.

Тактильді кері байланыс – телеоперацияның тиімділігін арттыратын негізгі технология. Ол операторға роботтың жанасу, ұстау, сырғу сияқты әрекеттерін сезінуге мүмкіндік береді. Бұл әсіресе күрделі манипуляциялық тапсырмаларда, мысалы, хирургиялық операцияларда маңызды [25, 26]. Shahbazi et al. 2018 жылғы көпжақты телеоперация жүйелеріне жасаған шолуында бірнеше оператордың бір роботты бірлесіп басқару мәселелерін талқылайды [27]. Алайда, тактильді кері байланысты жүзеге асыру бірнеше қиындықтармен байланысты: байланыс арнасындағы уақыт кідірісі жүйенің тұрақсыздығына әкелуі мүмкін [28], ал жоғары сапалы тактильді құрылғылардың құны жоғары болып келеді. Darvish et al. (2023) гуманоид роботтарды қашықтан басқаруға арналған заманауи әдістерге толық шолу жасаған [29].

Соңғы жылдары оператордың денесіне немесе қолына бекітілген сенсорлар арқылы роботты басқару әдістері белсенді дамуда. Бұл тәсіл қымбат тактильді құрылғыларды қажет етпейді және интуитивті басқаруды қамтамасыз етеді. Бұл үшін көбінесе инерциялық өлшеуіш блоктар, электромиография сенсорлары немесе компьютерлік көру жүйелері қолданылады [30, 31]. Бұл зерттеуде қолданылатын IMU-ға негізделген тәсіл оның қолжетімділігімен, мобильділігімен және салыстырмалы түрде жоғары дәлдігімен ерекшеленеді [32].

Бұл саладағы негізгі зерттеу бағыттарына байланыс арнасындағы кідірістің әсерін азайту, операторға берілетін кері байланыстың сапасын арттыру, және басқару интерфейстерінің интуитивтілігін жақсарту жатады [33, 34].

1.4. Манипуляторлардың траекториясын жоспарлау

Траекторияны жоспарлау – роботтың қозғалысын алдын ала жоспарлау процесі. Ол роботтың соңғы атқарушы органының немесе барлық буындарының уақыт бойынша орнын, жылдамдығын және үдеуін анықтайды.

Сапалы жобаланған траектория роботтың қозғалысының тегістігін, дәлдігін, жылдамдығын және қауіпсіздігін қамтамасыз етеді. Бұл сала бойынша көптеген шолулар жасалған, мысалы, Dai [35] және Jahanshahi [36] жалпы шолулар ұсынса, Sandakalum мобильді манипуляторларға арналған әдістерді талдайды [37].

Траекторияны жоспарлау есептері екі негізгі класқа бөлінеді:

1. Нүктеден нүктеге қозғалысты жоспарлау (Point-to-Point, PTP). Мұнда робот бастапқы нүктеден соңғы нүктеге қозғалуы керек, ал аралық траекторияның формасы маңызды емес. Бұл үшін көбінесе буындық кеңістікте полиномдық интерполяция әдістері қолданылады. Мысалы:

- Сызықтық сегменттермен параболалық үйлестіру (LSPB): Траекторияның басында және соңында тұрақты үдеумен қозғалысты, ал ортасында тұрақты жылдамдықты қамтамасыз етеді. Бұл үдеудің лездік өзгеруіне әкеледі [38].

- Кубтық полиномдар - бастапқы және соңғы нүктелердегі орын мен жылдамдықты ескереді, бірақ үдеудің үздіксіздігін қамтамасыз етпейді [39].

- бесінші дәрежелі полиномдар - бастапқы және соңғы нүктелердегі орынды, жылдамдықты және үдеуді ескере отырып, үзіліссіз үдеумен траекторияны генерациялайды. Бұл реабилитация сияқты тегістік маңызды қолданбалар үшін өте маңызды [40, 41].

2. Берілген жол бойымен қозғалысты жоспарлау - Path Following. Мұнда робот Декарттық кеңістікте алдын ала берілген геометриялық жол бойымен қозғалуы керек. Бұл дәнекерлеу, кесу сияқты өнеркәсіптік қолданбаларда жиі кездеседі.

Кедергілері бар ортада жоспарлау. Статикалық немесе динамикалық кедергілер болған жағдайда күрделірек алгоритмдер қажет. Бұл саладағы негізгі әдістер:

- Потенциалдық өрістер әдісі - робот мақсатқа тартылатын, ал кедергілерден итерілетін күш өрісінде қозғалады. Бұл әдіс есептеу тұрғысынан жылдам, бірақ жергілікті минимумдарға тұрып қалуы мүмкін [42].

- Ықтималдық жол карталары - бос кеңістікте кездейсоқ нүктелерді генерациялап, оларды жолдармен байланыстырып, граф құрады. Содан кейін осы графта бастапқы және соңғы нүктелер арасындағы ең қысқа жолды іздейді. Бұл әдіс күрделі кеңістіктер үшін тиімді, бірақ алдын ала есептеуді қажет етеді [43].

- Жылдам зерттелетін кездейсоқ ағаштар - бастапқы нүктеден бастап кеңістікті зерттейтін ағаш құрады. Әр итерацияда кездейсоқ нүкте таңдалып, ағаш сол нүктеге қарай «өседі». Бұл әдіс жоғары өлшемді кеңістіктерде тиімді және динамикалық орталарға бейімделуі мүмкін (RRT*) [44].

Соңғы жылдары машиналық оқытуға, әсіресе тереңдетіп оқыту негізделген әдістер белсенді дамуда. Бұл әдістер роботқа динамикалық және белгісіз ортада оңтайлы траекторияны «үйренуге» мүмкіндік береді [45]. Бұл диссертацияда бірнеше классикалық әдістерді салыстырмалы талдау арқылы

нақты міндеттерге ең сәйкес келетін алгоритмдерді таңдауға баса назар аударылды.

1.5. Адам қимылын тану және биоимитация

Гуманоид роботтардың қозғалысын адамға ұқсас ету – бұл адам–робот өзара әрекеттесуінің тиімділігін, қауіпсіздігін және табиғилығын арттырудың маңызды факторы. Адамға ұқсас қозғалыс роботтың әрекеттерін болжамды және түсінікті етеді, бұл әсіресе бірлескен жұмыс сценарийлерінде маңызды [46].

Нейрофизиология және биомеханика саласындағы зерттеулер адамның мақсатты қимылдары бірнеше негізгі принциптерге бағынатынын көрсетті:

- Тегістік - адамның қозғалыс траекториясы әдетте тегіс болып келеді. Бұл көбінесе лездік үдеуді минимизациялау принципімен байланыстырылады.
- Траекторияның формасы - соңғы атқарушы органы нүктеден нүктеге қозғалғанда, оның траекториясы сәл иілген жылдамдық профиліне ие болады [47].
- Буындардың үйлесімділігі - күрделі қозғалыстар кезінде бірнеше буын үйлесімді жұмыс істейді. Бұл үйлесімділіктер синергия деп аталатын төменгі өлшемді басқару модульдері арқылы жүзеге асырылады деген гипотеза бар [48].

Биоимитациялық әдістер - адамның қозғалысын басқаратын нейрондық және биомеханикалық принциптерді роботтарға бейімдеуге тырысады. Gulletta et al. (2020) өздерінің шолуында адамға ұқсас қол қозғалысын генерациялауға арналған заманауи зерттеулерді талдап, биоимитациялық әдістердің басымдылығын атап өтеді [49]. Олардың ішінде ең танымалдарының бірі – Динамикалық Қозғалыс Примитивтері (DMP). DMP – бұл сызықтық емес дифференциалдық теңдеулер жүйесі, ол үлгілі траекторияны үйреніп, содан кейін оны жаңа мақсаттарға, уақыт шкалаларына және кедергілерге бейімдей алады [50]. Бұл әдіс роботқа адамның қозғалыс стилін сақтай отырып, икемді әрекет етуге мүмкіндік береді.

Роботқа адамның қимылын үйрету немесе оны нақты уақытта басқару үшін алдымен сол қимылды сандық түрде жазып алу қажет. Бұл үшін әртүрлі технологиялар қолданылады:

- Оптикалық жүйелер - адамның денесіне бекітілген маркерлерді жоғары жылдамдықты камералар арқылы бақылайды. Бұл өте жоғары дәлдікті қамтамасыз етеді, бірақ қымбат және арнайы зертханалық жағдайларды қажет етеді [51].
- Инерциялық өлшеуіш блоктар - акселерометр, гироскоп және магнитометрден тұратын шағын сенсорлар. Олар адамның дене сегменттерінің кеңістіктегі бағдарын өлшейді. Бұл жүйелер мобильді, қолжетімді және кез келген ортада жұмыс істей алады, бірақ уақыт өте келе жинақталатын қателіктерге бейім [52].
- Компьютерлік көру - RGB немесе тереңдік (RGB-D) камералары арқылы адамның қаңқасын анықтайды. Бұл әдіс ешқандай сенсорды қажет

етпейді, бірақ камераның көру аймағының шектелуі, жарықтандыру шарттары және киімнің әсері сияқты мәселелерге тап болады [53].

1.6. Әдеби шолудың қорытындысы

Жасалған талдау келесі негізгі тұжырымдарды жасауға мүмкіндік береді:

1. Робот-манипуляторлардың кинематикасы мен динамикасын модельдеу саласында іргелі теориялық база қалыптасқан, бірақ нақты уақыттағы есептеулер мен модель параметрлерін дәл идентификациялау әлі де өзекті мәселе болып қала береді.

2. Реабилитациялық робототехникада «assist-as-needed» принципіне негізделген адаптивті басқару стратегиялары белсенді дамуда. Алайда, терапияны жекелендіру және оның ұзақ мерзімді тиімділігін арттыру үшін жаңа тәсілдер қажет.

3. Телеоперация жүйелеріндегі негізгі қиындықтар байланыс арнасындағы кідіріс және операторға сапалы кері байланыс берумен байланысты. IMU сияқты киілетін сенсорлар интуитивті басқару үшін перспективалы балама бола алады.

4. Траекторияны жоспарлау саласында көптеген әдістер бар, бірақ нақты қолданбаның (мысалы, реабилитациядағы тегістік пен теле-гидтегі жылдамдық) ерекше талаптарын ескеретін гибриді немесе контекстке тәуелді тәсілдерді әзірлеу қажеттілігі бар.

5. Адам қимылын тану және оны роботқа бейімдеу – адам–робот өзара әрекеттесуін жақсартудың негізгі бағыты. Бірақ көптеген зерттеулер тек бір қолдың қарапайым қимылдарына шоғырланған [49].

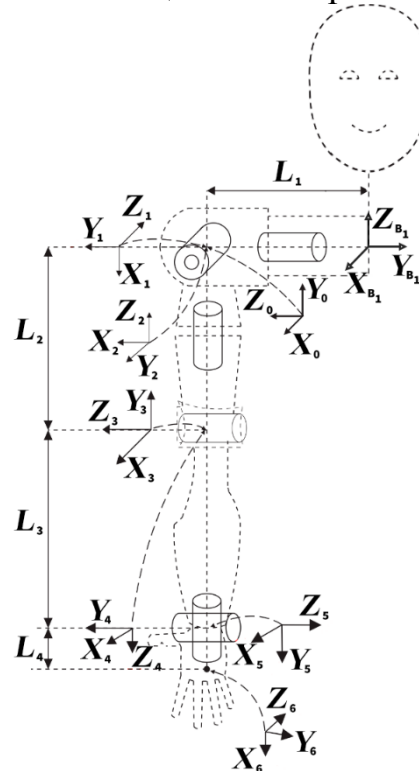
Осылайша, әдебиеттерге жасалған шолу бұл диссертациялық жұмыстың негізгі мақсаты – қашықтан басқару және адаптивті реабилитация функцияларын біріктіретін, адам қимылын қайталай алатын және әртүрлі сценарийлерге бейімделген траекторияны жоспарлау әдістерін қолданатын екі мақсатты гуманоид робот қолдың әзірлеудің өзектілігі мен ғылыми жаңалығын растайды. Бұл жұмыс жоғарыда аталған салалардағы бірнеше шешілмеген мәселелерді кешенді түрде қарастыруға бағытталған.

2. Гуманоид робот қолдың математикалық моделі.

2.1. Гуманоид робот қолдың кинематикасы.

Бұл бөлімде гуманоид робот қолдың тура және кері кинематикасы қарастырылады. Робот қолының кинематикасын зерттеу үшін Денавит-Хартенберг түрлендіру матрицалары алынған. Тура кинематикада соңғы атқарушы органның орналасуы осы матрицаларды көбейту арқылы анықталады. Робот қолының кері кинематикасын зерттеу үшін буын бұрыштарын аналитикалық түрде анықтау үшін «closed-form» әдісі қолданылады [56].

Координаталық жүйелері келесідей орналасқан. Базалық координаталық жазықтық, $O_{B_1}X_{B_1}Y_{B_1}Z_{B_1}$ мойынның ортасына орнатылады және бас пен қолдар үшін негізгі санақ жүйесі ретінде қабылданады. Денавит-Хартенберг (D-H) ережесіне сәйкес, $X_iY_iZ_i$ координаталық жүйелерінің Z_i осьтері ($i = 1, 2, \dots, 6$) айналмалы буындардың айналу осьтері бойымен бағытталған, X_i осьтері көршілес айналмалы буындардың айналу осьтері арасындағы ортақ нормальдар бойымен бағытталған. D-H параметрлері - екі көршілес координаталық жүйелер арасындағы кеңістіктік қатынасты анықтайтын төрт айнымалы жиынтығы.



Сурет 1 – Оң қолдың кинематикалық сұлбасы

Бұл параметрлер: d_i (Z_i осі бойымен орын ауыстыру), θ_i (Z_i осі бойымен айналу), α (X_i осі бойымен орын ауыстыру) және α (X_i осі бойымен айналу). 2-кестеде «Ai-Gerim» роботының оң қолының D-H параметрлері көрсетілген.

Кесте 2 – D-H параметрлері

i	θ_i	α_i	a_i	d_i
1	$-90 + \theta_1$	90	0	0

2	$\theta_2 + 90$	-90	0	0
3	$\theta_3 + 90$	90	0	$-L_2$
4	θ_4	90	0	0
5	θ_5	90	0	L_3
6	$90 + \theta_6$	0	L_4	0

Денавит–Хартенберг матрицасы осы төрт параметрді пайдаланып, көршілес координаталар жүйелері арасындағы кеңістіктік түрлендіруді, яғни олардың салыстырмалы орны мен бағдарын анықтайды. Әрбір қосылыс үшін ДН-матрицасы келесі түрде жазылады:

$${}^{i-1}\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i \cdot s\theta_i & s\alpha_i \cdot s\theta_i & a_i \cdot c\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i \cdot c\theta_i & -s\alpha_i \cdot c\theta_i & a_i \cdot s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & \mathbf{R}_{i-1}^i & & \mathbf{p}_{i-1}^i \\ & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Мұнда келесі қысқартулар қолданылды: $c\theta_i = \cos\theta_i$, $s\theta_i = \sin\theta_i$, $c\alpha_i = \cos\alpha_i$, $s\alpha_i = \sin\alpha_i$.

R матрицасы объектінің айналуын немесе бағытын сипаттайды. Бұл матрица кеңістіктегі объектінің координаталар жүйесінің өзгерісін білдіреді. Әдетте, R матрицасы 3×3 өлшемде болады және ол бір координаталар жүйесінен екіншіге өту үшін қажетті ротацияны жүзеге асырады. Ол үш негізгі бағыт бойынша объектінің айналуын сипаттайды.

P векторы объектінің кеңістіктегі орналасуын немесе орын ауыстыруын көрсетеді. Бұл вектор кеңістіктегі объектінің бастапқы немесе соңғы орнының координаттарын білдіреді. Әдетте P векторы бір координаталар жүйесінде орналасқан нүктенің (мысалы, объектінің орталығының) позициясын көрсетеді. Бұл вектор объектінің орналасуын немесе белгілі бір нүктенің жаңа координаталар жүйесіндегі орнының ауысуын сипаттайды.

$${}^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
{}^2\mathbf{A}_3 &= \begin{bmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ S_3 & 0 & -C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^3\mathbf{A}_4 &= \begin{bmatrix} C_4 & 0 & S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & -C_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^4\mathbf{A}_5 &= \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^5\mathbf{A}_6 &= \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & L_4 C_6 \\ S_6 & C_6 & 0 & L_4 S_6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Мұнда келесі қысқартулар қолданылды: $c_i = \cos\theta_i$, $s_i = \sin\theta_i$, және параметрлердің мәндері: $d_3 = L_2$, $d_5 = L_3$, $a_6 = L_4$.

Робот қолдың тура кинематикасында алты буын бұрышы θ_i көрсетілген, $O_{B_1}X_{B_1}Y_{B_1}Z_{B_1}$ координаталар жүйесіне қатысты соңғы атқарушы органның орны мен бағытын анықтау қажет. Ол үшін келесі матрицалық теңдеуді шығарамыз:

$${}^0\mathbf{A}_6 = \prod_{i=1}^6 {}^{i-1}\mathbf{A}_i = {}^0\mathbf{A}_1 \cdot {}^1\mathbf{A}_2 \cdot {}^2\mathbf{A}_3 \cdot {}^3\mathbf{A}_4 \cdot {}^4\mathbf{A}_5 \cdot {}^5\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} n & s & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Мұндағы $\mathbf{x}_6, \mathbf{y}_6$ және $\mathbf{z}_6$ - соңғы атқарушы органға бекітілген координаталар жүйесінің негізгі осьтері бойымен бағытталған бірлік векторлар, ал $\mathbf{p}_6$ - базалық координаталар жүйесіне қатысты соңғы атқарушы органның орнын сипаттайтын позиция векторы. Бұл үш бірлік вектор қолдың координаталар жүйесінің бастапқы координаталар жүйесіне $O_{B_1}X_{B_1}Y_{B_1}Z_{B_1}$ қатысты бағыт - бағдарын сипаттайды. n, s, a және p векторлары сәйкесінше нормаль векторды, сырғанау векторын, тәсіл векторын және позиция векторын білдіреді [18].

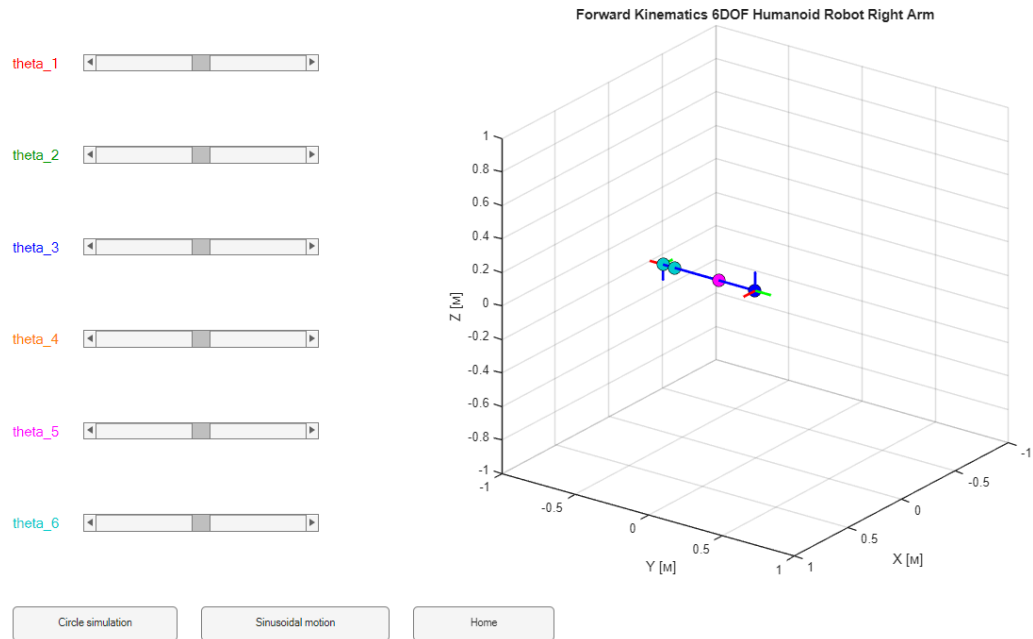
$${}^0\mathbf{A}_6 = {}^0\mathbf{A}_1 \cdot {}^1\mathbf{A}_2 \cdot {}^2\mathbf{A}_3 \cdot {}^3\mathbf{A}_4 \cdot {}^4\mathbf{A}_5 \cdot {}^5\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

бұл жердегі:

$$\begin{aligned}
n_x &= -S_6(S_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2) - C_6(C_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + \\
&\quad + C_1S_2S_4) - S_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3)) \\
s_x &= S_6(C_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) - S_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3)) - \\
&\quad - C_6(S_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2) \\
a_x &= -S_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) - C_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_x &= L_2 C_1 S_2 - L_3 (S_4 (S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) - C_1 C_4 S_2) - L_4 S_6 (S_4 (S_1 S_3 - \\
&\quad - C_1 C_2 C_3) - C_1 C_4 S_2) - L_4 C_6 (C_5 (C_4 (S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) + C_1 S_2 S_4) - \\
&\quad - S_5 (C_3 S_1 + C_1 C_2 S_3)) \\
n_y &= S_6 (S_4 (C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) + C_4 S_1 S_2 + C_6 (C_5 (C_4 (C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) - \\
&\quad - S_1 S_2 S_4) - S_5 (C_1 C_3 - C_2 S_1 S_3)) \\
s_y &= C_6 (S_4 (C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) + C_4 S_1 S_2 - S_6 (C_5 (C_4 (C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) - \\
&\quad - S_1 S_2 S_4) - S_5 (C_1 C_3 - C_2 S_1 S_3)) \\
a_y &= S_5 (C_4 (C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) - S_1 S_2 S_4) + C_5 (C_1 C_3 - C_2 S_1 S_3) \\
p_y &= L_3 (S_4 (C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) + S_1 S_2 C_4) + L_4 C_6 (C_5 (C_4 (C_1 S_3 + C_2 S_1 C_3) - \\
&\quad - S_1 S_2 S_4) - S_5 (C_1 C_3 - C_2 S_1 S_3)) + L_2 S_1 S_3 + L_4 S_6 (S_4 (C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) + C_4 S_1 S_2) \\
n_z &= C_6 (C_5 (C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) + S_2 S_3 S_5) - S_6 (C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4) \\
s_z &= -S_6 (C_5 (C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) + S_2 S_3 S_5) - C_6 (C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4) \\
a_z &= S_5 (C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) - C_5 S_2 S_3 \\
p_z &= L_4 C_6 (C_5 (C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) + S_2 S_3 S_5) - L_2 C_2 - L_4 S_6 (C_2 C_4 - \\
&\quad - C_3 S_2 S_4) - L_2 (C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4)
\end{aligned}$$

Осы гуманоид роботтың оң қолының тура кинематикасы яғни кеңістіктегі симуляциясы MATLAB ортасындағы бағдарламасын Қосымша 5-те көре аласыздар.



Сурет 2 – Гуманоид робот қолының тура кинематикасын есептеуге және 3D бейнелеуге арналған MATLAB графикалық интерфейсі.

Кері кинематика есебінде $O_{B_1} X_{B_1} Y_{B_1} Z_{B_1}$ санақ жүйесіне қатысты қолдың соңғы атқарушы органының қажетті орны мен бағдары берілгенде, буын бұрыштарын анықтау қажет. Манипулятордың кері кинематика есебі үшін, егер соңғы үш буынның осьтері бір-біріне параллель болса немесе бір нүктеде қиылысса, онда жабық түрдегі шешім алуға болады. Егер белгісіз буын бұрыштарын арктангенс функциясы арқылы символикалық түрде шешуге

болатын болса, буын шешімі "жабық формада" деп аталады. Роботының үш иық буынының осьтері бір нүктеде қиылысады, сондықтан жабық формадағы кинематикалық шешім бар.

Рієрер көрсеткендей, білек координат жақтауының p позиция векторы, соңғы үш буын бір нүктеде қиылысса, позициялау және бағыт - бағдар кіші жүйелеріне бөлінеді. Соңғы үш буын бұрышы $[n, s, a]$ және шешілген алғашқы үш буын бұрышынан анықталады. Осы қасиетті пайдалана отырып, есепті кері бағытта қарастыруға болады. Бұл жағдайда соңғы үш буыннан тұратын ішкі жүйе арқылы иық координаталар жүйесінің орны мен бағдарын қол координаталар жүйесіне қатысты өрнектеуге болады. Бұл жаңа p' позиция векторы тек θ_4 , θ_5 және θ_6 функциясы болып табылады және осылайша қол кинематикасын позиция және бағыт - бағдар компоненттеріне бөледі. "Робот қолының кері кинематика есебі (2.2) теңдеудің екі жағынан да керісін алу арқылы осы кері әдіспен шешіледі.

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{A}_6^{-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{s} & \mathbf{a} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}' & \mathbf{s}' & \mathbf{a}' & \mathbf{p}' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= {}^6\mathbf{A}_5 \cdot {}^5\mathbf{A}_4 \cdot {}^4\mathbf{A}_3 \cdot {}^3\mathbf{A}_2 \cdot {}^2\mathbf{A}_1 \cdot {}^1\mathbf{A}_0 = {}^6\mathbf{A}_0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

бұл жердегі:

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{A}_0 &= \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ S_1 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^2\mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^3\mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} C_3 & S_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ S_3 & -C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^4\mathbf{A}_3 &= \begin{bmatrix} C_4 & S_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ S_4 & -C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^5\mathbf{A}_4 &= \begin{bmatrix} C_5 & S_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_3 \\ S_5 & -C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Кері матрицаларды ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ қолдану арқылы (1.4) теңдеуді келесідей жазуға болады:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} n'_x & s'_x & a'_x & p'_x \\ n'_y & s'_y & a'_y & p'_y \\ n'_z & s'_z & a'_z & p'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^6\mathbf{A}_0 = {}^6\mathbf{A}_5 {}^5\mathbf{A}_4 {}^4\mathbf{A}_3 {}^3\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_0 = \\
& = \mathbf{A}^{RHS} = \begin{bmatrix} g_{111} & g_{112} & g_{113} & g_{114} \\ g_{121} & g_{122} & g_{123} & g_{124} \\ g_{131} & g_{132} & g_{133} & g_{134} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)
\end{aligned}$$

бұл жердегі:

$$\begin{aligned}
n'_x &= g_{111} = -C_1(S_2S_6 - C_2C_6C_{345}) - S_1C_6S_{345} \\
n'_y &= g_{121} = S_1S_6S_{345} - C_1(C_2S_6C_{345} + C_6S_2) \\
n'_z &= g_{131} = S_1C_{345} + C_1C_2S_{345} \\
s'_x &= g_{112} = C_1C_6S_{345} - S_1(S_2S_6 - C_2C_6C_{345}) \\
s'_y &= g_{122} = -C_1S_6S_{345} - S_1(C_2S_6C_{345} + C_6S_2) \\
s'_z &= g_{132} = C_2S_1S_{345} - C_1C_{345} \\
a'_x &= g_{113} = C_2S_6 + S_2C_6C_{345} \\
a'_y &= g_{123} = C_2C_6 - S_2S_6C_{345} \\
a'_z &= g_{133} = S_2S_{345} \\
p'_x &= g_{114} = -L_3 - L_3C_6C_{45} - C_5C_6L_4 \\
p'_y &= g_{124} = L_3S_6C_{45} + L_4C_5S_6 \\
p'_z &= g_{134} = -L_4S_5 - L_3S_{45}
\end{aligned}$$

(2.4) теңдеудің екі жағын да ${}^5\mathbf{A}_6$ матрицасына көбейту арқылы кері түрлендіру әдісін қолдана отырып, соңғы үш буын бұрыштарын табуға болады.

$${}^5\mathbf{A}_6 \cdot {}^0\mathbf{A}_6^{-1} = {}^5\mathbf{A}_6 \cdot {}^6\mathbf{A}_5 \cdot {}^5\mathbf{A}_4 \cdot {}^4\mathbf{A}_3 \cdot {}^3\mathbf{A}_2 \cdot {}^2\mathbf{A}_1 \cdot {}^1\mathbf{A}_0 \quad (2.6)$$

$${}^5\mathbf{A}_6 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{n}' & \mathbf{s}' & \mathbf{a}' & \mathbf{p}' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^5\mathbf{A}_0 \quad (2.7)$$

(2.7) теңдеуінің сол жағы:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{LHS} &= {}^5\mathbf{A}_0 \begin{bmatrix} \mathbf{n}' & \mathbf{s}' & \mathbf{a}' & \mathbf{p}' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & L_4C_6 \\ S_6 & C_6 & 0 & L_4S_6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n'_x & s'_x & a'_x & p'_x \\ n'_y & s'_y & a'_y & p'_y \\ n'_z & s'_z & a'_z & p'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} C_6n'_x - S_6n'_y & C_6s'_x - S_6s'_y & C_6a'_x - S_6a'_y & C_6p'_x - S_6p'_y + C_6L_4 \\ S_6n'_x + C_6n'_y & S_6s'_x + C_6s'_y & S_6a'_x + C_6a'_y & S_6p'_x + C_6p'_y + S_6L_4 \\ n'_z & s'_z & a'_z & p'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)
\end{aligned}$$

(2.7) теңдеуінің оң жағы:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{\text{RHS}} &= {}^5\mathbf{A}_0 = {}^5\mathbf{A}_4 \cdot {}^4\mathbf{A}_3 \cdot {}^3\mathbf{A}_2 \cdot {}^2\mathbf{A}_1 \cdot {}^1\mathbf{A}_0 = \\ &= \begin{bmatrix} a_{511} & a_{512} & a_{513} & a_{514} \\ a_{521} & a_{522} & a_{523} & a_{524} \\ a_{531} & a_{532} & a_{533} & a_{534} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.9)$$

бұл жердегі:

$$\begin{aligned} a_{511} &= C_1(C_2(S_3S_5 + C_3C_4C_5) - C_5S_2S_4) + S_1(C_3S_5 - C_4C_5S_3) \\ a_{512} &= S_1(C_2(S_3S_5 + C_3C_4C_5) - C_5S_2S_4) - C_1(C_3S_5 - C_4C_5S_3) \\ a_{513} &= S_2(S_3S_5 + C_3C_4C_5) + C_2C_5S_4 \\ a_{514} &= L_2C_5S_4 \\ a_{521} &= C_1(C_4S_2 + C_2C_3S_4) - S_1S_3S_4 \\ a_{522} &= S_1(C_4S_2 + C_2C_3S_4) + C_1S_3S_4 \\ a_{523} &= C_3S_2S_4 - C_2C_4 \\ a_{524} &= -L_3 - L_2C_4 \\ a_{531} &= -C_1(C_2(C_5S_3 - C_3C_4S_5) + S_2S_4S_5) - S_1(C_3C_5 + C_4S_3S_5) \\ a_{532} &= C_1(C_3C_5 + C_4S_3S_5) - S_1(C_2(C_5S_3 - C_3C_4S_5) + S_2S_4S_5) \\ a_{533} &= C_2S_4S_5 - S_2(C_5S_3 - C_3C_4S_5) \\ a_{534} &= L_2S_4S_5 \end{aligned}$$

(2.8) және (2.9) теңдеулерінің соңғы бағандарын (позиция мүшелері) теңестіру арқылы соңғы үш буын бұрыштарын табуға болады.

$$C_6(p'_x + L_4) - S_6p'_y = S_4C_5L_2, \quad (2.10)$$

$$S_6(p'_x + L_4) + C_6p'_y = -C_4L_2 - L_3, \quad (2.11)$$

$$p'_z = S_4S_5L_2. \quad (2.12)$$

$p'_x + L_4 = rC_\psi$ және $p'_y = rS_\psi$ деп алайық, оларды (2.10) және (2.11) теңдеулеріне қойсақ, келесіні аламыз:

$$rC_{6\psi} = S_4C_5L_2 \quad (2.13)$$

$$rS_{6\psi} = -C_4L_2 - L_3 \quad (2.14)$$

$$p'_z = S_4S_5L_2 \quad (2.15)$$

бұл жердегі:

$$\psi = \text{atan2}(p'_y, p'_x + L_4)$$

(2.13) және (2.14) теңдеулерін квадраттап, қосып, C_4 үшін келесі теңдеуді аламыз:

$$C_4 = \frac{(p'_x + L_4)^2 + (p'_y)^2 + (p'_z)^2 - L_2^2 - L_3^2}{2L_2L_3}, \quad (2.16)$$

$$\theta_4 = \text{atan2} \left(\pm \sqrt{1 - C_4^2}, C_4 \right) \quad (2.17)$$

(2.15) теңдеуінен S_5 табуға болады:

$$S_5 = \frac{p'_z}{S_4L_2} = \pm \frac{p'_z}{\sqrt{1 - C_4^2}L_2}$$

$$\theta_5 = \text{atan2} \left(S_5, \pm \sqrt{1 - S_5^2} \right) \quad (2.18)$$

(2.13) және (2.14) теңдеулерін бөлсек, алатынымыз:

$$\tan(\theta_6 + \psi) = \frac{-C_4L_2 - L_3}{S_4C_5L_2} \quad (2.19)$$

$$\theta_6 = \text{atan2}(-C_4L_2 - L_3, S_4C_5L_2) - \psi \quad (2.20)$$

θ_1 , θ_2 және θ_3 буын бұрыштарын шешу үшін (2.5) теңдеуінің екі жағын да ${}^3\mathbf{A}_4$, ${}^4\mathbf{A}_5$, ${}^5\mathbf{A}_6$ матрицаларына көбейтеміз. Нәтижесінде теңдеудің сол жағы келесідей болады:

$$\mathbf{A}^{\text{LHS}} = {}^3\mathbf{A}_4 \cdot {}^4\mathbf{A}_5 \cdot {}^5\mathbf{A}_6 \cdot \begin{bmatrix} n'_x & s'_x & a'_x & p'_x \\ n'_y & s'_y & a'_y & p'_y \\ n'_z & s'_z & a'_z & p'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{411} & a_{412} & a_{413} & a_{414} \\ a_{421} & a_{422} & a_{423} & a_{424} \\ a_{431} & a_{432} & a_{433} & a_{434} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

бұл жердегі:

$$\begin{aligned}
a_{411} &= n'_x(S_4S_6 + C_4C_5C_6) + n'_y(C_6S_4 - C_4C_5S_6) + n'_zC_4S_5 \\
a_{412} &= s'_x(S_4S_6 + C_4C_5C_6) + s'_y(C_6S_4 - C_4C_5S_6) + s'_zC_4S_5 \\
a_{413} &= a'_x(S_4S_6 + C_4C_5C_6) + a'_y(C_6S_4 - C_4C_5S_6) + a'_zC_4S_5 \\
a_{414} &= p'_x(S_4S_6 + C_4C_5C_6) + p'_y(C_6S_4 - C_4C_5S_6) + p'_zC_4S_5 + a_6S_4S_6 + L_6C_4C_5C_6 \\
a_{421} &= n'_zS_4S_5 - n'_y(C_4C_6 + C_5S_4S_6) - n'_x(C_4S_6 - C_5C_6S_4) \\
a_{422} &= s'_zS_4S_5 - s'_y(C_4C_6 + C_5S_4S_6) - s'_x(C_4S_6 - C_5C_6S_4) \\
a_{423} &= a'_zS_4S_5 - a'_y(C_4C_6 + C_5S_4S_6) - a'_x(C_4S_6 - C_5C_6S_4) \\
a_{424} &= p'_zS_4S_5 - p'_y(C_4C_6 + C_5S_4S_6) - L_6C_4S_6 - p'_x(C_4S_6 - C_5C_6S_4) + L_6C_5C_6S_4 \\
a_{431} &= n'_xC_6S_5 - n'_zC_5 - n'_yS_5S_6 \\
a_{432} &= s'_xC_6S_5 - s'_zC_5 - s'_yS_5S_6 \\
a_{433} &= a'_xC_6S_5 - a'_zC_5 - a'_yS_5S_6 \\
a_{434} &= d_4 - p'_zC_5 + L_6C_6S_5 + p'_xC_6S_5 - p'_yS_5S_6
\end{aligned}$$

ал теңдеудің оң жағы келесідей болады:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{\text{RHS}} &= {}^3\mathbf{A}_2 \cdot {}^2\mathbf{A}_1 \cdot {}^1\mathbf{A}_0 = {}^3\mathbf{A}_0 = \\
&= \begin{bmatrix} C_1C_2C_3 - S_1S_3 & C_1S_3 + C_2S_3S_3 & C_3S_2 & 0 \\ -C_1S_2 & -S_1S_2 & C_2 & L_2 \\ C_3S_1 + C_1C_2S_3 & C_2S_1S_3 - C_1C_3 & S_2S_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)
\end{aligned}$$

(2.21) және (2.22) теңдеулерінің (2, 3) элементін теңестіру арқылы C_2 аламыз:

$$C_2 = g_{432} = a'_x(S_4C_5C_6 - C_4S_6) - a'_y(C_4C_6 + S_4C_5S_6) + a'_zS_4S_5 \quad (2.23)$$

$$\theta_2 = \text{atan2} \left(\pm \sqrt{1 - C_2^2}, C_2 \right) \quad (2.24)$$

Сол және оң жақ матрицаларының (1, 3) және (3, 3) элементтерін салыстыру арқылы θ_3 буын бұрышының шешімін анықтауға болады.

$$\frac{S_2S_3}{S_2C_3} = \frac{g_{433}}{g_{431}} \quad (2.25)$$

$$\frac{S_3}{C_3} = \frac{a'_xS_5C_6 - a'_yS_5S_6 - a'_zC_5}{a'_x(S_4S_6 + C_4C_5C_6) + a'_y(S_4C_6 - C_4C_5S_6) + a'_zC_4S_5} \quad (2.26)$$

$$\theta_3 = \text{atan2} (g_{433}, g_{431}) \quad (2.27)$$

Сол және оң жақ матрицалардың (2, 1) және (2, 2) элементтерін салыстыру арқылы θ_1 буын бұрышының шешімін анықтауға болады.

$$\frac{-S_1S_2}{-C_1S_2} = \frac{g_{422}}{g_{412}} \quad (2.28)$$

$$\frac{-S_1}{-C_1} = \frac{s'_x(S_4C_5C_6 - C_4S_6) - s'_y(C_4C_6 + S_4C_5S_6) + s'_zS_4S_5}{n'_x(S_4C_5C_6 - C_4S_6) - n'_y(C_4C_6 + S_4C_5S_6) + n'_zS_4S_5} \quad (2.29)$$

$$\theta_1 = \text{atan } 2(-g_{422}, -g_{412}) \quad (2.30)$$

Барлық буындар үшін шешім алынды, бірақ θ_1 және θ_3 мәндері $\sin(\theta_2)$ таңбасына байланысты. Кейбір жағдайларда ($\sin(\theta_2) < 0$), көздеген мақсатқа сәйкес келу үшін есептелген бұрыштарды $\pm\pi$ немесе 2π -ге жылжыту қажет болады.

Осы бөлімде гуманоид робот қолының кинематикасының тура және кері есептерін шешу әдістері жасалды. Роботтың әр қолында алты еркіндік дәрежесі бар. D-H әдісі негізінде көршілес буындардың түрлендіру матрицалары алынған.

Тура кинематика есебінде, соңғы атқарушы органның орны мен бағыты буын бұрыштарының берілген мәндері бойынша D-H матрицаларын тізбектей көбейту арқылы анықталады. Робот қолының кинематикасының кері есебін шешу, яғни көрсетілген соңғы атқарушы органның берілген орны мен бағдары бойынша буын бұрыштарын анықтау, анағұрлым күрделі болып табылады. Кері кинематика есебін шешу үшін кері бөлу әдісі қолданылды. Бұл жағдайда, соңғы үш буынның айналу осьтері бір нүктеде қиылысады және кері кинематика есебінің шешімі жабық формада аналитикалық түрде жүзеге асырылды.

2.2. Ерекше жағдайлар (сингулярлық жағдайлар)

Гуманоид робот қолы үшін сингулярлықтың үш негізгі түрі бар. Олар шынтақ, иық және иық-шынтақ. Енді олардың әрқайсысын жеке қарастырайық.

1-ші жағдай: Шынтақ сингулярлығы, яғни $\theta_4 = 0$ жағдайы

Бұл жағдайда θ_3 және θ_5 осьтері коллинеар болады. Бұл жағдайда барлық бұрыштарды қайта есептеу қажет, себебі алдыңғы бөлімде ұсынылған теңдеулер C_4 мәніне негізделген. $\theta_4 = 0$ немесе $C_4 = 1$ және $S_4 = 0$ болған жағдайда (2.5) және (2.6) теңдеулеріне қайта оралу қажет.

A^{LHS} және A^{RHS} -ынан (3,1) элементтерін пайдалану арқылы келесі теңдеуді аламыз:

$$S_2(C_3C_5 + S_3S_5) = S_2(C_{3,5}) = C_6a'_x - S_6a'_y$$

Сондай-ақ (3, 3) элементтерін теңестірсек, онда:

$$S_2(C_3S_5 - S_3C_5) = -S_2(S_{3,5}) = a'_z$$

Осылайша:

$$\frac{-S_{3,5}}{C_{3,5}} = \frac{a'_z}{C_6a'_x - S_6a'_y} \quad (2.31)$$

$$\theta_{T(3-5)} = \text{atan } 2(-a'_z, C_6a'_x - S_6a'_y) \quad (2.32)$$

Және жоғарыдағы (2.8) және (2.9) матрицаларының (2, 1) және (2, 3) элементтерін теңестіру арқылы келесі теңдікті аламыз:

$$\begin{aligned} C_1 S_2 &= S_6 n'_x + C_6 n'_y \\ -C_2 &= S_6 a'_x + C_6 a'_y \end{aligned}$$

Осылайша:

$$\frac{S_2}{-C_2} = \frac{S_6 n'_x + C_6 n'_y}{C_1 (S_6 a'_x + C_6 a'_y)} \quad (2.33)$$

$$\theta_2 = \operatorname{atan} 2 (S_6 n'_x + C_6 n'_y, -C_1 (S_6 a'_x + C_6 a'_y)) \quad (2.34)$$

Назар аударсақ, θ_2 мәні C_1 мәніне тәуелді.

(1, 4) элементін пайдалансақ:

$$0 = C_6 p'_x - S_6 p'_y + C_6 L_4 \quad (2.35)$$

$$S_6 p'_y = C_6 (p'_x + L_4) \quad (2.36)$$

$$\frac{S_6}{C_6} = \frac{p'_x + L_4}{p'_y} \quad (2.37)$$

$$\theta_6 = \operatorname{atan} 2 (p'_x + L_4, p'_y) \quad (2.38)$$

Ал (2, 1) және (2, 2) элементтерін пайдалану арқылы келесі теңдікті аламыз:

$$\theta_1 = \operatorname{atan} 2 (S_6 s'_x + C_6 s'_y, S_6 n'_x + C_6 n'_y) \quad (2.39)$$

2-жағдай: Иықтың сингулярлығы, яғни $c = 0$ жағдайы

Бұл нақты жағдайда тек θ_1 және θ_3 қайта қарауымыз керек. C_4 мәні 1-ге тең емес болғандықтан, θ_4 , θ_5 және θ_6 мәндері 2.1-бөлімде бөлімде көрсетілген теңдеулер күшінде қалады. $\theta_2 = 0$ болғандықтан $C_2 = 1$ және $S_2 = 0$ болады. Осы мәндерді 2.1-бөлімде бөлімдегі (2.8) және (2.9) теңдеуге қоямыз. Сол матрицалардың (2, 1) элементтерін теңестіру арқылы келесі теңдеуді аламыз:

$$S_4 (C_1 C_3 - S_1 S_3) = S_6 n'_x + C_6 n'_y \quad (2.40)$$

Ал (2, 2) элементі арқылы:

$$S_4 (S_1 C_3 + C_1 S_3) = S_6 s'_x + C_6 s'_y \quad (2.41)$$

Осылайша:

$$\frac{S_{3+1}}{C_{3+1}} = \frac{S_6 s'_x + C_6 s'_y}{S_6 n'_x + C_6 n'_y} \quad (2.42)$$

$$\theta_T = \operatorname{atan} 2 (S_6 s'_x + C_6 s'_y, S_6 n'_x + C_6 n'_y) \quad (2.43)$$

3-жағдай: Иық–шынтақ сингулярлығы немесе θ_4 және $\theta_2 = 0$

Бұл θ_1 , θ_3 және θ_5 коллинеар дегенді білдіреді. Алдыңғы қолданған әдіс бойынша θ_2 θ_4 мәндерін теңдеулерге қойып шыққан матрицалардың (2, 1) орындарын теңестіру арқылы келесі теңдеуді аламыз:

$$C_1(C_3 S_5 - S_3 C_5) - S_1(S_3 S_5 + C_3 C_5) = n'_z \quad (2.44)$$

Ал (2, 2) арқылы:

$$S_1(C_3 S_5 - S_3 C_5) + C_1(S_3 S_5 + C_3 C_5) = s'_z \quad (2.45)$$

Осылайша:

$$\theta_{T(1+5-3)} = \operatorname{atan} 2 (-n'_z, s'_z) \quad (2.46)$$

2.3. MATLAB ортасында робот қолының қозғалысын визуализациялау және кері кинематика есебін тексеруге арналған бағдарламалар.

Алдымен осы робот қолының қозғалысын тура кинематикасы арқылы визуализациялау бағдарлама талданады. Бағдарлама мәтініне түсіндірме берілген. Осы түсіндірмелерді алып тасталынған толық бағдарламадан қол қозғалысының θ_1 бұрышы бойынша 0 мен 180 градус аралығында әрбір градус бойынша қозғалысын бақылауға болады.

```
clc, clear all, close all
format long
```

Бұл жерде роботтың әр буынының бастапқы бұрыштары радианмен беріледі. θ_1 (fi1) бұрышы цикл ішінде өзгереді. Бұл цикл fi1 бұрышын 0-ден π -ге дейін $\pi/180$ қадамымен өзгертеді. Әрбір қадамда роботтың жаңа конфигурациясы есептеліп, визуализацияланады. Және осы жерде барлық бізге қажетті бұрыш мәндерін бере отырып барлық алты бұрыш қозғалысын визуализациялай аламыз:

```
fi2 = 0;
fi3 = 0;
fi4 = pi/2;
fi5 = -pi/2;
fi6 = -pi/2;
```

for fi1=0 : pi/180 : pi

Келесі бөлікте әр буын үшін түрлендіру матрицалары A01, A12, ..., A56 есептеледі:

$$A01 = \begin{bmatrix} \cos(-\pi/2 + (fi1)) & 0 & \sin(-\pi/2 + (fi1)) & 0; \\ \sin(-\pi/2 + (fi1)) & 0 & -\cos(-\pi/2 + (fi1)) & 0; \\ 0 & 1 & 0 & 0; \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A12 = \begin{bmatrix} \cos(\pi/2 + (fi2)) & 0 & -\sin(\pi/2 + (fi2)) & 0; \\ \sin(\pi/2 + (fi2)) & 0 & \cos(\pi/2 + (fi2)) & 0; \\ 0 & -1 & 0 & 0; \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A23 = \begin{bmatrix} \cos(\pi/2 + (fi3)) & 0 & \sin(\pi/2 + (fi3)) & 0; \\ \sin(\pi/2 + (fi3)) & 0 & -\cos(\pi/2 + (fi3)) & 0; \\ 0 & 1 & 0 & -25; \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A231 = \begin{bmatrix} \cos(\pi/2 + (fi3)) & 0 & \sin(\pi/2 + (fi3)) & 0; \\ \sin(\pi/2 + (fi3)) & 0 & -\cos(\pi/2 + (fi3)) & 0; \\ 0 & 1 & 0 & 0; \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A34 = \begin{bmatrix} \cos(0 + (fi4)) & 0 & \sin(0 + (fi4)) & 0; \\ \sin(0 + (fi4)) & 0 & -\cos(0 + (fi4)) & 0; \\ 0 & 1 & 0 & 0; \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A45 = \begin{bmatrix} \cos(0 + (fi5)) & 0 & \sin(fi5) & 0; \\ \sin(fi5) & 0 & -\cos(fi5) & 0; \\ 0 & 1 & 0 & 30; \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A451 = \begin{bmatrix} \cos(0 + (fi5)) & 0 & \sin(0 + (fi5)) & 0; \\ \sin(0 + (fi5)) & 0 & -\cos(0 + (fi5)) & 0; \\ 0 & 1 & 0 & 0; \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A56 = \begin{bmatrix} \cos(\pi/2 + (fi6)) & -\sin(\pi/2 + (fi6)) & 0 & 8*\cos(\pi/2 + (fi6)); \\ \sin(\pi/2 + (fi6)) & \cos(\pi/2 + (fi6)) & 0 & 8*\sin(\pi/2 + (fi6)); \\ 0 & 0 & 1 & 0; \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Бұл жерде бірнеше буыннан өту үшін түрлендіру матрицалары көбейтіледі.

$$A03 = A01 * A12 * A23;$$

$$A35 = A01 * A12 * A231 * A34 * A45;$$

$$A05 = A01 * A12 * A23 * A34 * A45;$$

```
A56 = A01*A12*A231*A34*A451*A56;
A06 = A01*A12*A23*A34*A45*A56;
```

Бұл бөлікте әр буынның ұшының позициясы есептеліп, X1th, X2th, X3th векторлары алынады. Мысалы, X1th векторы 3-ші буынның ұшының позициясын білдіреді.

```
X1T = [0;
        0;
        0;
        1];
X = [68 93]; Y = [93 93]; Z = [93 93];
plot3(X,Y,Z,'bo')
plot3(X,Y,Z,'b')
X1th = A03*X1T;
X11th1 = X1th(3);
Y11th1 = X1th(1);
Z11th1 = X1th(2);
X2th = A35*X1T;
X21th1 = X2th(3);
Y21th1 = X2th(1);
Z21th1 = X2th(2);
X3th = A56*X1T;
X31th1 = X3th(3);
Y31th1 = X3th(1);
Z31th1 = X3th(2);
```

Бұл бөлікте әр буынды білдіретін сызықтардың координаттары есептеледі. Координаттар X1, Y1, Z1, X2, Y2, Z2, X3, Y3, Z3 векторларына сақталады.

```
if X11th1 >= 0
    X1 = [(68 - X11th1) 68];
    Y1 = [(93 - Y11th1) 93];
    Z1 = [(93 + Z11th1) 93];
    if X21th1 >= 0
        X2 = [(68 - X11th1 - X21th1) (68 - X11th1)];
        Y2 = [(93 - Y11th1 - Y21th1) (93 - Y11th1)];
        Z2 = [(93 + Z11th1 + Z21th1) (93 + Z11th1)];
        if X31th1 >= 0
            X3 = [(68 - X11th1 - X21th1 - X31th1) (68 - X11th1 - X21th1)];
            Y3 = [(93 - Y11th1 - Y21th1 - Y31th1) (93 - Y11th1 - Y21th1)];
            Z3 = [(93 + Z11th1 + Z21th1 + Z31th1) (93 + Z11th1 + Z21th1)];
        elseif X31th1 < 0
```

```

        X3 = [(68 - X11th1 - X21th1) (68 - X11th1 - X21th1 - X31th1)];
        Y3 = [(93 - Y11th1 - Y21th1) (93 - Y11th1 - Y21th1 - Y31th1)];
        Z3 = [(93 + Z11th1 + Z21th1) (93 + Z11th1 + Z21th1 + Z31th1)];
    end
elseif X21th1 < 0
    X2 = [(68 - X11th1) (68 - X11th1 - X21th1)];
    if Y21th1 >= 0
        Y2 = [(93 - Y11th1) (93 - Y11th1 - Y21th1)];
        Z2 = [(93 + Z11th1) (93 + Z11th1 + Z21th1)];
        if X31th1 >= 0
            X3 = [(68 - X11th1 - X21th1 - X31th1) (68 - X11th1 - X21th1)];
            Y3 = [(93 - Y11th1 - Y21th1 - Y31th1) (93 - Y11th1 - Y21th1)];
            Z3 = [(93 + Z11th1 + Z21th1 + Z31th1) (93 + Z11th1 + Z21th1)];
        elseif X31th1 < 0
            X3 = [(68 - X11th1 - X21th1) (68 - X11th1 - X21th1 - X31th1)];
            Y3 = [(93 - Y11th1 - Y21th1) (93 - Y11th1 - Y21th1 - Y31th1)];
            Z3 = [(93 + Z11th1 + Z21th1) (93 + Z11th1 + Z21th1 + Z31th1)];
        end
    end
end
elseif X11th1 < 0
    X1 = [68 (68 - X11th1)];
    Y1 = [93 (93 - Y11th1)];
    Z1 = [93 (93 + Z11th1)];
    if X21th1 >= 0
        X2 = [(68 - X11th1 - X21th1) (68 - X11th1)];
        Y2 = [(93 - Y11th1 - Y21th1) (93 - Y11th1)];
        Z2 = [(93 + Z11th1 + Z21th1) (93 + Z11th1)];
        if X31th1 >= 0
            X3 = [(68 - X11th1 - X21th1 - X31th1) (68 - X11th1 - X21th1)];
            Y3 = [(93 - Y11th1 - Y21th1 - Y31th1) (93 - Y11th1 - Y21th1)];
            Z3 = [(93 + Z11th1 + Z21th1 + Z31th1) (93 + Z11th1 + Z21th1)];
        elseif X31th1 < 0
            X3 = [(68 - X11th1 - X21th1) (68 - X11th1 - X21th1 - X31th1)];
            Y3 = [(93 - Y11th1 - Y21th1) (93 - Y11th1 - Y21th1 - Y31th1)];
            Z3 = [(93 + Z11th1 + Z21th1) (93 + Z11th1 + Z21th1 + Z31th1)];
        end
    end
elseif X21th1 < 0
    X2 = [(68 - X11th1) (68 - X11th1 - X21th1)];
    Y2 = [(93 - Y11th1) (93 - Y11th1 - Y21th1)];
    Z2 = [(93 + Z11th1) (93 + Z11th1 + Z21th1)];
    if X31th1 >= 0
        X3 = [(68 - X11th1 - X21th1 - X31th1) (68 - X11th1 - X21th1)];
        Y3 = [(93 - Y11th1 - Y21th1 - Y31th1) (93 - Y11th1 - Y21th1)];
    end
end

```

```

        Z3 = [(93 + Z11th1 + Z21th1 + Z31th1) (93 + Z11th1 + Z21th1)];
elseif X31th1 < 0
        X3 = [(68 - X11th1 - X21th1) (68 - X11th1 - X21th1 - X31th1)];
        Y3 = [(93 - Y11th1 - Y21th1) (93 - Y11th1 - Y21th1 - Y31th1)];
        Z3 = [(93 + Z11th1 + Z21th1) (93 + Z11th1 + Z21th1 + Z31th1)];
    end
end
end

```

Бұл бөлікте есептелген координаттар бойынша роботтың әр буыны үшөлшемді түрінде көрсетіледі.

hold on: бұрын салынған графиканы сақтайды.

plot3: 3D сызықтарын салады.

grid on: торды қосады.

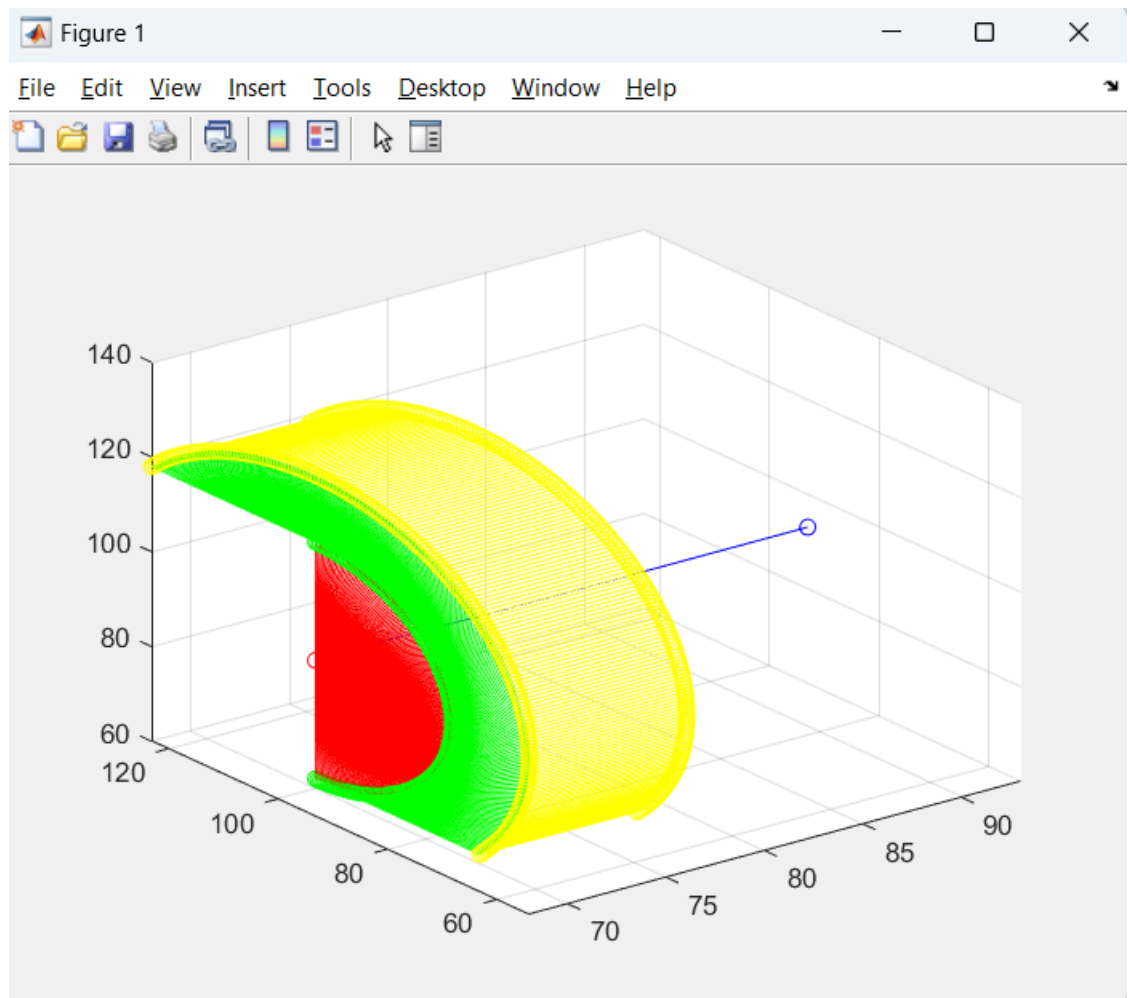
pause(0.1): 0.1 секундқа кідіртеді, бұл роботтың қозғалысын анимациялау үшін қолданылады.

```

hold on
plot3(X1,Y1,Z1,'ro')
plot3(X1,Y1,Z1,'r')
hold on
plot3(X2,Y2,Z2,'go')
plot3(X2,Y2,Z2,'g')
hold on
plot3(X3,Y3,Z3,'yo')
plot3(X3,Y3,Z3,'y')
grid on
pause(0.1)
end

```

Осы жоғарыда берілген бұрыштар арқылы жазылған бағдарламаның суреті:



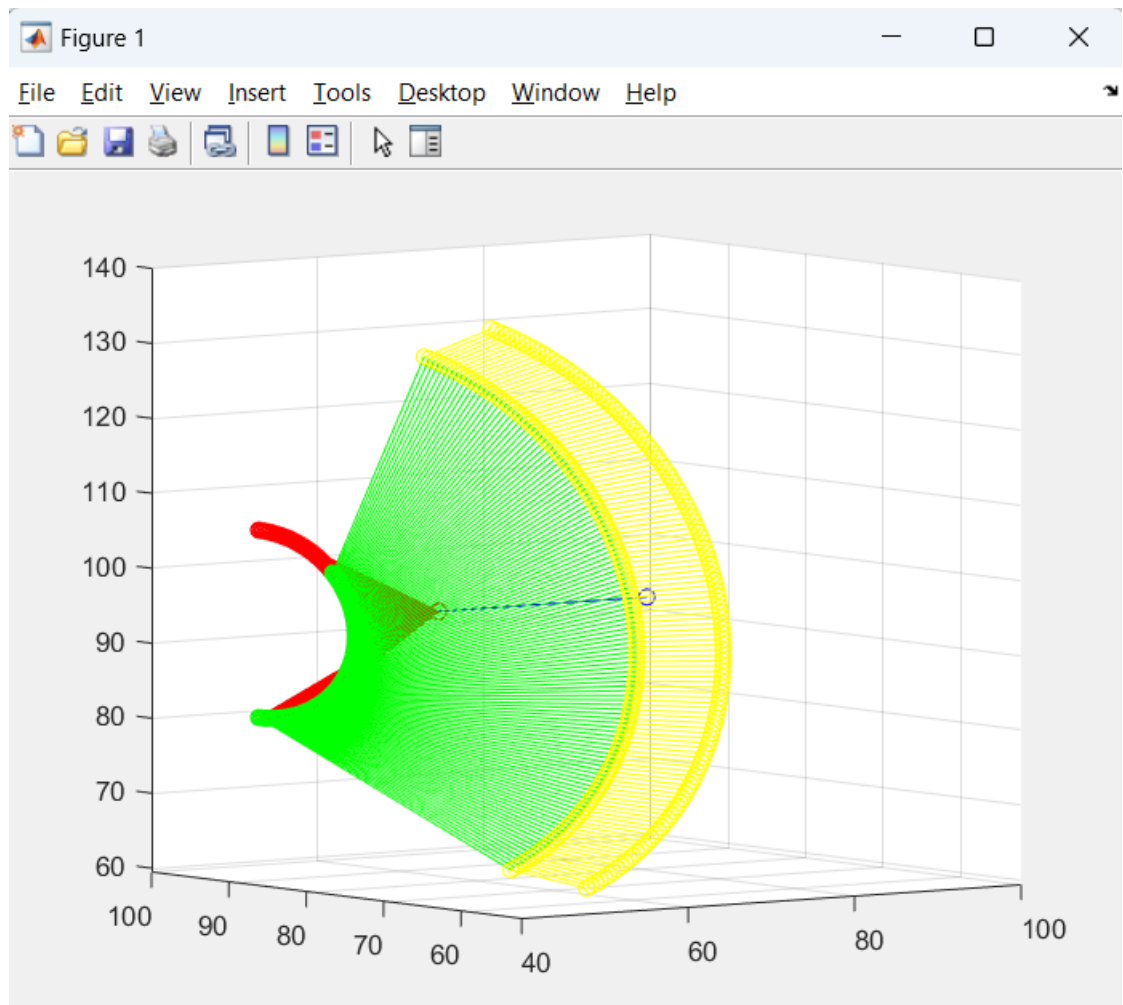
Сурет 3 – Гуманоид робот қолының тура кинематикасын үшөлшемді визуализациялау нәтижесі

Енді тағы бірнеше бұрыш мәндері үшін визуализациялауға болады. Ол үшін бағдарламаның бөлігін келесіге ауыстыру керек:

```

fi2 = pi/3;
fi3 = pi/4;
fi4 = pi/2;
fi5 = -pi/6;
fi6 = -pi/4;
for fi1=0 : pi/180 : pi

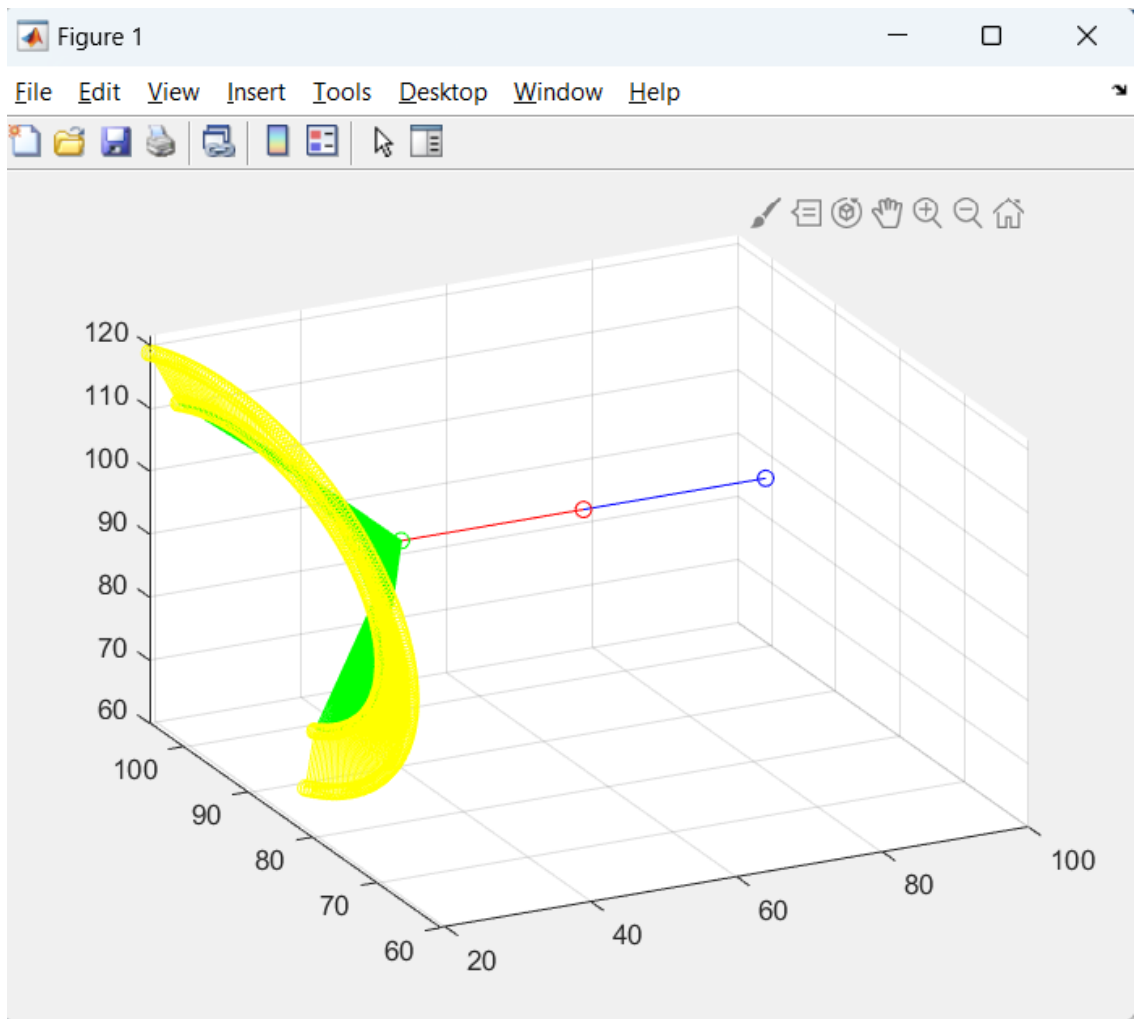
```



Сурет 4 – Гуманоид робот қолының басқа буын бұрыштары мәндеріндегі үшөлшемді көрінісі

Келесі буын бұрыштары мәндері үшін:

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \pi/2; \\ \theta_3 &= \pi/3; \\ \theta_4 &= \pi/4; \\ \theta_5 &= -\pi/5; \\ \theta_6 &= -\pi/6; \end{aligned}$$



Сурет 5 – Гуманоид робот қолының берілген буын конфигурациясындағы кеңістіктегі қалпы

Енді кері кинематиканы тексеру бағдарламасына тоқталсақ. Келесі бағдарлама робот қолының берілген конфигурациясы үшін тура және кері кинематика есептеулерін орындайды. Алдымен тура кинематика негізінде соңғы атқарушы органның позициясы мен ориентациясы есептеледі. Содан кейін, кері кинематиканы қолдана отырып, берілген соңғы атқарушы орган позициясы мен ориентациясына жету үшін қажетті буын бұрыштары анықталады.

```
clc, clear all, close all
```

```
format long
```

fi1 - fi6: Роботтың әрбір буынының бұрыштары (радианмен берілген).

```
fi1 = 25*pi/180;
```

```
fi2 = 46*pi/180;
```

```
fi3 = 12*pi/180;
```

```
fi4 = 89*pi/180;
```

```
fi5 = 0*pi/180;
```

```
fi6 = 20*pi/180;
```

A01 - A56 - әрбір буын үшін түрлендіру матрицалары. Бұл матрицалар роботтың бір буынынан екіншісіне өтуді сипаттайды.

A10 - A65 - кері бағыттағы түрлендіру матрицалары (i буыннан i - 1 буынға).

$$A01 = \begin{bmatrix} \cos(-\pi/2 + (f_1)) & 0 & \sin(-\pi/2 + (f_1)) & 0; \\ \sin(-\pi/2 + (f_1)) & 0 & -\cos(-\pi/2 + (f_1)) & 0; \\ 0 & 1 & 0 & 0; \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A12 = \begin{bmatrix} \cos(\pi/2 + (f_2)) & 0 & -\sin(\pi/2 + (f_2)) & 0; \\ \sin(\pi/2 + (f_2)) & 0 & \cos(\pi/2 + (f_2)) & 0; \\ 0 & -1 & 0 & 0; \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A23 = \begin{bmatrix} \cos(\pi/2 + (f_3)) & 0 & \sin(\pi/2 + (f_3)) & 0; \\ \sin(\pi/2 + (f_3)) & 0 & -\cos(\pi/2 + (f_3)) & 0; \\ 0 & 1 & 0 & -25; \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A34 = \begin{bmatrix} \cos(0 + (f_4)) & 0 & \sin(0 + (f_4)) & 0; \\ \sin(0 + (f_4)) & 0 & -\cos(0 + (f_4)) & 0; \\ 0 & 1 & 0 & 0; \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A45 = \begin{bmatrix} \cos(0 + (f_5)) & 0 & \sin(0 + (f_5)) & 0; \\ \sin(0 + (f_5)) & 0 & -\cos(0 + (f_5)) & 0; \\ 0 & 1 & 0 & 30; \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A56 = \begin{bmatrix} \cos(\pi/2 + (f_6)) & -\sin(\pi/2 + (f_6)) & 0 & 8*\cos(\pi/2 + (f_6)); \\ \sin(\pi/2 + (f_6)) & \cos(\pi/2 + (f_6)) & 0 & 8*\sin(\pi/2 + (f_6)); \\ 0 & 0 & 1 & 0; \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A10 = \begin{bmatrix} \cos(-\pi/2 + (f_1)) & \sin(-\pi/2 + (f_1)) & 0 & 0; \\ 0 & 0 & 1 & 0; \\ \sin(-\pi/2 + (f_1)) & -\cos(-\pi/2 + (f_1)) & 0 & 0; \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A21 = \begin{bmatrix} \cos(\pi/2 + (f_2)) & \sin(\pi/2 + (f_2)) & 0 & 0; \\ 0 & 0 & -1 & 0; \\ -\sin(\pi/2 + (f_2)) & \cos(\pi/2 + (f_2)) & 0 & 0; \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A32 = \begin{bmatrix} \cos(\pi/2 + (f_3)) & \sin(\pi/2 + (f_3)) & 0 & 0; \\ 0 & 0 & 1 & 25; \\ \sin(\pi/2 + (f_3)) & -\cos(\pi/2 + (f_3)) & 0 & 0; \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A43 = \begin{bmatrix} \cos(0 + (f_4)) & \sin(0 + (f_4)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0; \\ \sin(0 + (f_4)) & -\cos(0 + (f_4)) & 0 & 0; \end{bmatrix}$$

```

0 0 0 1];
A54 = [ cos(0 + (fi5)) sin(0 + (fi5)) 0 0;
0 0 1 -30;
sin(0 + (fi5)) -cos(0 + (fi5)) 0 0;
0 0 0 1];
A65 = [ cos(pi/2 + (fi6)) sin(pi/2 + (fi6)) 0 -8;
-sin(pi/2 + (fi6)) cos(pi/2 + (fi6)) 0 0;
0 0 1 0;
0 0 0 1];

```

A03, A05, A06: Бірнеше буын арқылы өтетін түрлендіру матрицаларының көбейтіндісі.

A60: Соңғы буыннан негізгі координат жүйесіне дейінгі трансформация.

Alhs: Теңдеудің сол жағын есептеу үшін қолданылатын матрица.

```

A03 = A01*A12*A23;
A05 = A01*A12*A23*A34*A45;
A06 = A01*A12*A23*A34*A45*A56;
A60 = A65*A54*A43*A32*A21*A10;
Alhs = A34*A45*A56*A60;

```

Бұл бөлікте A60 және Alhs матрицаларының элементтерін қолдана отырып, роботтың барлық буындарының бұрыштары (th1 - th6) есептеледі. Тригонометриялық функциялар (cos, sin, atan, atan2) кері кинематика есептеулерінде қолданылады.

```

costh4 = ((A60(13)+ 8)^2 + (A60(14))^2 +(A60(15))^2 - 25^2 -
30^2)/(2*25*30);
sinh4 = (1-(costh4)^2)^(1/2);
th4 = ((atan2(sinh4,costh4))*180)/pi;
sinh5 = A60(15)/(sinh4*25);
costh5 = (1-(sinh5)^2)^(1/2);
th5 = ((atan2(sinh5,costh5))*180)/pi;
fi1 = ((atan(A60(14)/(A60(13) + 8)))*180)/pi;
th6 = (((atan((-costh4*25-30)/(sinh4*costh5*25)))*180)/pi) - fi1 + 90;
costh6 = (1-((tan((((th6*pi)/180))/2))^2)/(1+((tan((((th6*pi)/180))/2))^2));
sinh6 = (1-(costh6)^2)^(1/2);
costh2 = Alhs(10);
sinh2 = ((1-(costh2)^2)^(1/2));
th2 = (((atan(sinh2/costh2))*180)/pi) + 90;
th3 = (((atan(Alhs(11)/Alhs(9)))*180)/pi) + 90;
th1 = (((atan2(Alhs(6),Alhs(2)))*180)/pi) - 90;

```

Осы бағдарлама арқылы кері кинематиканың дұрыстығы тексерілді.

Қорыта айтқанда, берілген екі бағдарлама да робот қолының кинематикасын модельдеуге бағытталды.

Бірінші бағдарлама робот қолының қозғалысын визуализациялауға бағытталған. Ол бір буынның бұрышын біртіндеп өзгертіп, әрбір қадамда роботтың конфигурациясын үшөлшемді кеңістік түрінде көрсетеді. Бұл бағдарлама роботтың жұмыс кеңістігін және қозғалыс шектеулерін түсінуге көмектеседі.

Екінші бағдарлама роботтың тура және кері кинематикасын есептеуге бағытталған. Ол берілген буын бұрыштары бойынша соңғы атқарушы органның позициясы мен ориентациясын есептейді және керісінше, берілген соңғы атқарушы орган позициясы мен ориентациясына жету үшін қажетті буын бұрыштарын анықтайды. Бұл бағдарлама робот қолды басқару жүйелерін жобалау және талдау үшін маңызды.

2.4. Якобиан матрицасы

Робот-қолдың қозғалысын басқарудағы ең маңызды сұрақтардың бірі – «Егер әрбір буындағы электр қозғалтқышын белгілі бір жылдамдықпен айналса, робот қолдың соңғы атқарушы органы кеңістікте қандай жылдамдықпен және қай бағытта қозғалады?». Осы сұраққа жауап беретін құрал – Якобиан матрицасы. Якобиан матрицасы (J) – бұл роботтың буындық кеңістіктегі жылдамдықтарын ($\dot{q}$) оның Декарттық кеңістіктегі (жұмыс кеңістігі) жылдамдықтарымен ($\dot{x}$) байланыстыратын сызықтық түрлендіру.

Математикалық түрде бұл байланыс өте қарапайым формуламен өрнектеледі:

$$\dot{x} = J(q)\dot{q} \quad (2.47)$$

Мұндағы:

$\dot{x}$ – соңғы атқарушы органның Декарттық жылдамдық векторы. 6-DOF робот үшін бұл вектор 6 компоненттен тұрады. Оның үшеуі сызықтық жылдамдық (v_x, v_y, v_z) және үшеуі бұрыштық жылдамдық ($\omega_x, \omega_y, \omega_z$).

$\dot{q}$ – роботтың буындық жылдамдық векторы. 6-DOF робот үшін бұл әрбір буынның (мотордың) айналу жылдамдығы: ($\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4, \dot{q}_5, \dot{q}_6$).

$J(q)$ – Якобиан матрицасы. Біздің робот қолымыздың еркіндік дәрежесі алтыға тең болғаны үшін бұл матрицаның өлшемі 6×6 болады және оның мәндері роботтың ағымдағы q -ға тәуелді. Бұл өте маңызды – Якобиан тұрақты емес, ол робот қозғалған сайын үнемі өзгеріп отырады.

Келесі робот қолының траекториясын жоспарлау тарауында талқылайтын LIN траекториясын орындау үшін робот қолының соңғы атқарушы органның кеңістікте тұрақты жылдамдықпен қозғалғанын қалаймыз. Якобиан арқылы осы қалаған Декарттық жылдамдыққа ($\dot{x}$) жету үшін әрбір моторды қандай жылдамдықпен ($\dot{q}$) айналдыру керектігін есептей аламыз. Бұл кері кинематиканың жылдамдық деңгейіндегі шешімі: $\dot{q} = J^{-1}(q) * \dot{x}$.

Кейбір позицияларда робот «қатып қалады», яғни белгілі бір бағытта қозғала алмай қалады. Бұл сингулярлық деп аталады. Математикалық

тұрғыдан, бұл Якобиан матрицасының анықтаушы нөлге тең болатын немесе оның кері матрицасын (J^{-1}) табу мүмкін болмайтын жағдай. Якобианды есептеу арқылы осындай қауіпті позицияларды алдын-ала анықтап, олардан аулақ жүретін траекторияны жоспарлай аламыз.

Якобианның тағы маңызды қасиеттерінің бірі – ол күштерді де түрлендіре алады. Робот қолының соңғы атқарушы органға түсірілген сыртқы күш әрбір моторға қандай моменттер τ тудыратынын Якобианның транспонирленген матрицасы арқылы табуға болады: $\tau = J^T(q) * F$. Бұл импеданстық басқаруда және күшті сезінуде өте маңызды.

Якобиан матрицасының өзі одан да кішірек екі 3×6 өлшемді кіші матрицаға бөлуге болады. J_v сызықтық якобиан бұл жоғарғы 3×6 матрица. Ол әрбір буынның айналуы соңғы атқарушы органның сызықтық жылдамдығына қалай әсер ететінін сипаттайды. Ал J_ω бұрыштық якобиан болса төменгі 3×6 матрица. Ол әрбір буынның айналуы соңғы атқарушы органның бұрыштық жылдамдығына қалай әсер ететінін сипаттайды. Матрицаның әрбір бағаны бір буынға сәйкес келеді. Яғни, j -шы баған j -шы буынның қозғалысының жалпы жылдамдыққа қосатын «үлесін» көрсетеді.

Енді J_v сызықтық якобианды соңғы атқарушы органның x, y, z мәндерінен $[q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6]$ бойынша дербес туынды алу арқылы табамыз:

$$J_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{\partial x}{\partial q_4} & \frac{\partial x}{\partial q_5} & \frac{\partial x}{\partial q_6} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{\partial y}{\partial q_4} & \frac{\partial y}{\partial q_5} & \frac{\partial y}{\partial q_6} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} & \frac{\partial z}{\partial q_4} & \frac{\partial z}{\partial q_5} & \frac{\partial z}{\partial q_6} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Бұл жердегі x, y, z мәндері алдыңғы тура кинематикадағы табылған ${}^0A_6$ формуласындағы p_x, p_y, p_z , ал $[q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6]$ болса, бізде олар $[\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6]$. Олардың мәндері белгілі. Енді дербес туындылар жеке-жеке келтіріледі, себебі ол ұзын өрнек. Алдымен θ_1 бойынша дербес туынды алынады:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_x}{\partial \theta_1} &= -L_2 S_1 S_2 - L_3 (S_4 (C_1 S_3 + S_1 C_2 C_3) + S_1 C_4 S_2) - L_4 S_6 (S_4 (C_1 S_3 + \\ &\quad + S_1 C_2 C_3) + S_1 C_4 S_2) - L_4 C_6 (C_5 (C_4 (C_1 S_3 + S_1 C_2 C_3) - S_1 S_2 S_4) - \\ &\quad - S_5 (C_3 C_1 - S_1 C_2 S_3)) \\ \frac{\partial p_y}{\partial \theta_1} &= L_3 (S_4 (C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3) + C_1 S_2 C_4) + L_4 C_6 (C_5 (C_4 (C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3) - \\ &\quad - C_1 S_2 S_4) + S_5 (S_1 C_3 + C_2 C_1 S_3)) + L_2 C_1 S_3 + L_4 S_6 (S_4 (C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3) + C_1 C_4 S_2) \\ \frac{\partial p_z}{\partial \theta_1} &= L_4 C_6 (C_5 (C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) + S_2 S_3 S_5) \end{aligned}$$

Екінші θ_2 бойынша дербес туынды алынады:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_x}{\partial \theta_2} &= L_2 C_1 S_2 - L_3 (S_2 S_4 C_1 C_3 - C_1 C_2 C_4) - L_4 S_6 (S_4 C_1 S_2 C_3 - \\
&\quad - C_1 C_4 C_2 - L_4 C_6 (C_5 C_1 S_2 C_3 C_4 + C_1 C_2 S_4) + C_1 S_2 S_3 S_5) \\
\frac{\partial p_y}{\partial \theta_2} &= L_3 (S_1 C_2 C_4 - S_1 S_2 C_3 S_4) - L_4 C_6 (C_5 (S_2 S_1 C_3 C_4 + S_1 C_2 S_4) - \\
&\quad - S_1 S_2 S_3 S_5) + L_4 S_6 (C_4 S_1 C_2 - S_2 C_3 S_1 S_4) \\
\frac{\partial p_z}{\partial \theta_2} &= L_4 C_6 (C_5 (C_2 C_3 C_4 - S_2 S_4) - S_2 S_3 S_5) + L_2 S_2 + L_4 S_6 (S_2 C_4 + \\
&\quad + C_3 C_2 S_4 + L_2 (S_2 C_4 + C_3 C_2 S_4))
\end{aligned}$$

Содан кейін θ_3 бойынша дербес туынды алынады:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_x}{\partial \theta_3} &= -L_3 S_4 (S_1 C_3 + C_1 C_2 S_3) - L_4 S_4 S_6 (S_1 C_3 + C_1 C_2 S_3) - \\
&\quad - L_4 C_5 C_6 (C_4 (S_1 C_3 + C_1 C_2 S_3) + S_5 (S_3 S_1 - C_1 C_2 C_3)) \\
\frac{\partial p_y}{\partial \theta_3} &= L_3 S_4 (C_1 C_3 - C_2 S_3 S_1) + L_4 C_6 (C_4 C_5 (C_1 C_3 - C_2 S_1 S_3) + S_5 (C_1 S_3 + \\
&\quad + C_2 S_1 C_3)) + L_2 S_1 C_3 + L_4 S_4 S_6 (C_1 C_3 - C_2 S_3 S_1) \\
\frac{\partial p_z}{\partial \theta_3} &= L_4 C_6 (S_2 C_3 C_5 S_5 - C_3 C_4 S_2) + L_4 C_3 C_2 S_4 S_6 - L_2 S_2 S_3 S_4
\end{aligned}$$

Содан кейін θ_4 бойынша дербес туынды алынады:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_x}{\partial \theta_4} &= -L_3 (C_4 (S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) + C_1 S_4 S_2) - L_4 S_6 (C_4 (S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) + \\
&\quad + C_1 S_4 S_2) - L_4 C_6 (C_5 (C_1 S_2 C_4 - S_4 (S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3)) \\
\frac{\partial p_y}{\partial \theta_4} &= L_3 (C_4 (C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) - S_1 S_2 S_4) - L_4 C_6 C_5 (S_4 (C_1 S_3 + C_2 S_1 C_3) + \\
&\quad + S_1 S_2 C_4)) + L_4 S_6 (C_4 (C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) - S_4 S_1 S_2) \\
\frac{\partial p_z}{\partial \theta_4} &= L_4 C_6 C_5 (C_2 C_4 - C_3 S_4 S_2) + L_4 S_6 (C_2 S_4 + C_3 S_2 C_4) + L_2 (C_2 S_4 + C_3 S_2 C_4)
\end{aligned}$$

Содан кейін θ_5 бойынша дербес туынды алынады:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_x}{\partial \theta_5} &= L_4 C_6 (S_5 (C_4 (S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) + C_1 S_2 S_4) + C_5 (C_3 S_1 + C_1 C_2 S_3)) \\
\frac{\partial p_y}{\partial \theta_5} &= L_4 C_6 (S_5 (C_4 C_1 S_3 + C_2 S_1 C_3) + C_5 (C_1 C_3 - C_2 S_1 S_3)) \\
\frac{\partial p_z}{\partial \theta_5} &= L_4 C_6 (S_2 S_3 C_5 - S_5 (C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2))
\end{aligned}$$

Соңғысы θ_6 бойынша дербес туынды алынады:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_x}{\partial \theta_6} &= -L_4 C_6 (S_4 (S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) - C_1 C_4 S_2) + L_4 S_6 (C_5 (C_4 (S_1 S_3 - \\ &\quad - C_1 C_2 C_3 + C_1 S_2 S_4) \\ \frac{\partial p_y}{\partial \theta_6} &= -L_4 S_6 (C_5 (C_4 (C_1 S_3 + C_2 S_1 C_3) - S_1 S_2 S_4) + L_4 C_6 (S_4 (C_1 S_3 + \\ &\quad + C_2 C_3 S_1) + C_4 S_1 S_2) \\ \frac{\partial p_z}{\partial \theta_6} &= -L_4 S_6 (C_5 (C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) + S_2 S_3 S_5) - L_4 C_6 (C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4)\end{aligned}$$

Енді төменгі $\mathbf{J}_\omega$ бұрыштық якобианды табу формуласы келесідей:

$$\mathbf{J}_{\omega_i} = {}^0\mathbf{R}_{i-1} \mathbf{z}_l \quad (2.49)$$

${}^0\mathbf{R}_{i-1}$ – базалық координаттар жүйесінен (i-1)-ші координаттар жүйесіне дейінгі айналу матрицасы

$\mathbf{z}_l$ – локалды координаттар жүйесінде айналу осі. Бұл жұмыста барлық айналу осі z, сол себепті:

$$\mathbf{z}_l = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Алдыңғы кинематиканың тура есебінде табылған ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ матрицаларынан ${}^{i-1}\mathbf{R}_i$ матрицаларын алсақ болады. Солай $\mathbf{J}_{\omega_i}$ табамыз:

$$\mathbf{J}_{\omega_1} = {}^0\mathbf{R}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Себебі ${}^0\mathbf{R}_0 = I$. Келесі:

$$\mathbf{J}_{\omega_2} = {}^0\mathbf{R}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 \\ S_1 & 0 & -C_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ -C_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Енді $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_6$ негізінде $\theta_1 - 90, \theta_2 + 90, \theta_3 + 90, \theta_6 + 90$ тең. Сол үшін осы және келесі матрицаларға қойсақ келтіру формуласынан матрица өрнегі өзгереді. Тек осы $\mathbf{J}_{\omega_2}$ ға ғана көрсетіледі, ал қалғандары өзгермей қала береді. Қойған кездегі матрица:

$$\mathbf{J}_{\omega_2} = \begin{bmatrix} -C_1 \\ -S_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Келесі матрицалар сәйкесінше келесі түрде анықталады:

$$J_{\omega_3} = {}^0R_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0R_1 {}^1R_2 z_l = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 \\ S_1 & 0 & -C_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 \\ S_2 & 0 & C_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_1 S_2 \\ -S_1 S_2 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$$J_{\omega_4} = {}^0R_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0R_1 {}^1R_2 {}^2R_3 z_l = \begin{bmatrix} S_1 C_3 + C_1 C_2 S_3 \\ S_1 C_2 S_3 - C_1 C_3 \\ S_2 S_3 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

$$J_{\omega_5} = {}^0R_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0R_1 {}^1R_2 {}^2R_3 {}^3R_4 z_l = \begin{bmatrix} C_1 S_2 C_4 - S_4 (S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) \\ S_4 (C_1 S_3 + S_1 C_2 C_3) + S_1 S_2 C_4 \\ S_2 C_3 S_4 - C_2 C_4 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

$$J_{\omega_6} = {}^0R_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_5 (C_4 (S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) - C_1 S_2 S_4) - C_5 (S_1 C_3 + C_1 C_2 S_3) \\ S_5 (C_4 (C_1 S_3 + S_1 C_2 C_3) - S_1 S_2 S_4) + C_5 (C_1 C_3 - S_1 C_2 S_3) \\ S_5 (C_2 S_4 + S_2 C_3 C_4) - S_2 S_3 C_5 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Қорытындылай кетсек алты еркіндік дәрежелі робот қолы үшін Якобиан матрицасы талданды. Якобиан матрицасы роботтың динамикасын талдау, сингулярлық конфигурацияларды анықтау, траекторияны жоспарлау және күрделі басқару алгоритмдерін құру сияқты көптеген маңызды есептерді шешуде негізгі рөл атқарады.

2.5. Динамика. Лагранж – Эйлер әдісі.

Қолдың қозғалысының толық сипаттамасын Лагранж – Эйлер әдісі арқылы алуға болады. Динамика теңдеуін лагранждық формализмді қолдана отырып, қолдың кинематикасын Денавит – Хартенбергтің матрицалық сипаттамасына келтіре отырып алуға болады. Денавит – Хартенберг сипаттамасы мен Лагранж әдісін бірге пайдалану қозғалыс теңдеуін ықшамды векторлы – матрицалық пішінге келтіреді. Ал бұл аналитикалық зерттеуге ыңғайлы және компьютерде жүзеге асыруға мүмкіндік береді.

Қолдың қозғалысының динамикалық теңдеуді қорытып шығару келесілерге негізделген:

1. Кеңістіктегі i және $i - 1$ -ші координаталық жүйесіндегі буындардың өзара орналасуы ${}^{i-1}A_i$ түрлендіру матрицасы арқылы сипатталуына.

2. Лагранж – Эйлер теңдеуін қолдануға

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.56)$$

Бұл жердегі L Лагранж функциясы ($L = K - P$), K – қолдың толық кинетикалық энергиясы, P – қолдың толық потенциалдық энергиясы, q_i – қолдың жалпылама координатасы, $\dot{q}_i$ – жалпылама координатадан уақыт бойынша алынған туындысы, τ_i – i – ші буынға берілген қозғалысты жүзеге асырудағы i – ші буындағы жалпылама күш немесе момент.

Лагранж – Эйлер теңдеуін қолдану үшін қарастырылып отырған жүйенің кинетикалық энергиясын білу керек, яғни оның барлық нүктелерінің жылдамдықтарын. Қозғалмайтын координаталар жүйесіне қатысты берілген i – ші буындағы координаталар жүйесіндегі координатасы ${}^i\mathbf{r}_i$ болатын еркін нүктені қарастырамыз.

$${}^i\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = (x_i, y_i, z_i, 1)^T \quad (2.57)$$

Осы нүктенің қозғалмайтын координаталар жүйесіне қатысты координатасын ${}^0\mathbf{r}_i$ деп белгіленеді. i – ші және $i - 1$ – ші координаталар жүйесіндегі буындардың кеңістіктегі орнын анықтайтын түрлендіру матрицасын ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ деп, ал қозғалмайтын координаталар жүйесі мен i – ші координаталық жүйесін байланыстыратын матрицаны ${}^0\mathbf{A}_i$ деп белгіленеді. Онда ${}^0\mathbf{r}_i$ және ${}^i\mathbf{r}_i$ арасындағы байланыс келесі түрде өрнектеледі:

$${}^0\mathbf{r}_i = {}^0\mathbf{A}_i {}^i\mathbf{r}_i \quad (2.58)$$

$${}^0\mathbf{A}_i = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 \dots {}^{i-1}\mathbf{A}_i \quad (2.59)$$

$${}^{i-1}\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i \cdot s\theta_i & s\alpha_i \cdot s\theta_i & a_i \cdot c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i \cdot c\alpha_i & -s\alpha_i \cdot c\theta_i & a_i \cdot s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & [\mathbf{R}_{i-1}^i] & \{P_{i-1}^i\} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Робот қол қатты дене болғандықтан ${}^i\mathbf{r}_i$ нүктесі мен i – ші буындағы кез келген нүкте i – ші координаталар жүйесіне қатысты жылдамдығы нөлге тең. ${}^i\mathbf{r}_i$ нүктесі қозғалмайтын координата жүйесіне қатысты салыстырмалы жылдамдығы келесі формуламен өрнектеледі:

$$\begin{aligned}
{}^0v_i &\equiv v_i = \frac{d({}^0\mathbf{r}_i)}{dt} = \\
\frac{d}{dt} \left({}^0\mathbf{A}_i {}^i\mathbf{r}_i \right) &= \dot{{}^0\mathbf{A}}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3 {}^3\mathbf{A}_4 {}^4\mathbf{A}_5 {}^5\mathbf{A}_6 {}^i\mathbf{r}_i + \\
&+ {}^0\mathbf{A}_1 \dot{{}^1\mathbf{A}}_2 {}^2\mathbf{A}_3 {}^3\mathbf{A}_4 {}^4\mathbf{A}_5 {}^5\mathbf{A}_6 {}^i\mathbf{r}_i + {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 \dot{{}^2\mathbf{A}}_3 {}^3\mathbf{A}_4 {}^4\mathbf{A}_5 {}^5\mathbf{A}_6 {}^i\mathbf{r}_i + \\
&+ {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3 \dot{{}^3\mathbf{A}}_4 {}^4\mathbf{A}_5 {}^5\mathbf{A}_6 {}^i\mathbf{r}_i + {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3 {}^3\mathbf{A}_4 \dot{{}^4\mathbf{A}}_5 {}^5\mathbf{A}_6 {}^i\mathbf{r}_i + \\
&+ {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3 {}^3\mathbf{A}_4 {}^4\mathbf{A}_5 \dot{{}^5\mathbf{A}}_6 {}^i\mathbf{r}_i + {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3 {}^3\mathbf{A}_4 {}^4\mathbf{A}_5 {}^5\mathbf{A}_6 \dot{{}^i\mathbf{r}}_i = \\
&= \left[\sum_{j=1}^i \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right] {}^i\mathbf{r}_i
\end{aligned} \tag{2.61}$$

${}^0\mathbf{A}_i$ матрицасынан q_i айнымалысы арқылы алынған дербес туындыны $\mathbf{Q}_i$ матрицасы арқылы алған оңай. Ал $\mathbf{Q}_i$:

$$\mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.62}$$

$$\frac{\partial {}^{i-1}\mathbf{A}_i}{\partial q_i} = \mathbf{Q}_i {}^{i-1}\mathbf{A}_i \tag{2.63}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial {}^{i-1}\mathbf{A}_i}{\partial q_i} &= \begin{bmatrix} -\sin \theta_i & -\cos \alpha_i \cos \theta_i & \sin \alpha_i \cos \theta_i & -\alpha_i \sin \theta_i \\ \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & \alpha_i \cos \theta_i \\ 0 & 0 & 0 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & \alpha_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & \alpha_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \mathbf{Q}_i {}^{i-1}\mathbf{A}_i
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Осыдан шығатыны:

$$\frac{\partial {}^0\mathbf{A}_i}{\partial q_j} = \begin{cases} {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 \dots {}^{j-2}\mathbf{A}_{j-1} \mathbf{Q}_j {}^{j-1}\mathbf{A}_j \dots {}^{i-1}\mathbf{A}_i, j \leq i \\ 0, j > i \end{cases} \tag{2.65}$$

Осы формула келесі түрде өрнектеледі:

$$\mathbf{U}_{ij} = \begin{cases} {}^0\mathbf{A}_{j-1} \mathbf{Q}_j {}^{j-1}\mathbf{A}_i, j \leq i \\ 0, j > i \end{cases} \tag{2.66}$$

Осы енгізуді пайдаланып v_i формуласын келесі түрде жазылады.

$$\mathbf{U}_i = [\sum_{j=1}^i \mathbf{U}_{ij} \dot{q}_j] {}^i \mathbf{r}_i \quad (2.67)$$

${}^{i-1} \mathbf{A}_i$ матрицасынан q_i айнымалысы арқылы алынған дербес туындысы енді біртекті координатаның түрлендіруші матрицасы болмайды. Біздің жағдайда $\mathbf{Q}_i$ матрицасымен ${}^{i-1} \mathbf{A}_i$ матрицасының көбейтіндісі ${}^{i-1} \mathbf{A}_i$ матрицасының бірінші қатардағы барлық элементтерді қарама-қарсыға өзгертіп үшінші мен төртінші қатарды толығымен нөлге айналдырады.

Буындардың өзара әрекеттесу әсерін сипаттайтын шамасы анықталады:

$$\frac{\partial \mathbf{U}_{ij}}{\partial q_k} \equiv \mathbf{U}_{ijk} = \begin{cases} {}^0 \mathbf{A}_{j-1} \mathbf{Q}_j {}^{j-1} \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{Q}_k {}^{k-1} \mathbf{A}_i, & i \geq k \geq j \\ {}^0 \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{Q}_k {}^{k-1} \mathbf{A}_{j-1} \mathbf{Q}_j {}^{j-1} \mathbf{A}_i, & i \geq j \geq k \\ 0, & j > i, \text{ or } i < k \end{cases} \quad (2.68)$$

Осы формулалар бойынша жүргізілген есептеулер 1-қосымшада келтірілген.

2.5.1. Гуманоид қолының кинетикалық энергиясы.

Гуманоид қолының әр буынының еркін нүктесінің жылдамдығын білу арқылы i –ші буынның кинетикалық энергиясын табамыз. i – ші буынның кинетикалық энергиясын K_i деп белгіленеді. Массасы dm болатын i – ші буынның кинетикалық энергиясын dK_i білдірсін, онда ол келесі формуламен өрнектеледі.

$$\begin{aligned} dK_i &= \frac{1}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) dm = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^T) dm \quad (2.69) \\ dK_i &= \frac{1}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) dm = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^T) dm = \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\sum_{p=1}^i \mathbf{U}_{ip} \dot{q}_p {}^i \mathbf{r}_i \left[\sum_{r=1}^i \mathbf{U}_{ir} \dot{q}_r {}^i \mathbf{r}_i \right]^T \right] dm = \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \mathbf{U}_{ip}^T {}^i \mathbf{r}_i {}^i \mathbf{r}_i^T \mathbf{U}_{ir} \dot{q}_p \dot{q}_r \right] dm = \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \mathbf{U}_{ip} ({}^i \mathbf{r}_i {}^i \mathbf{r}_i^T) \mathbf{U}_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right] dm \quad (2.70) \end{aligned}$$

$\mathbf{U}_{ij}$ матрицасы i -ші буындағы нүктенің қозғалмайтын координаталар жүйесіне қатысты өзгерісін көрсетеді. Бұл матрица i -ші буындағы барлық нүктеге бірдей және буындағы массалар таралуына тәуелді емес.

$$K_i = \int dK_i = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \mathbf{U}_{ip} \left(\int {}^i \mathbf{r}_i {}^i \mathbf{r}_i^T dm \right) \mathbf{U}_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right] \quad (2.71)$$

i -ші буынның инерция матрицасы келесі түрде өрнектеледі.

$$\mathbf{J}_i = \int {}^i \mathbf{r}_i {}^i \mathbf{r}_i^T dm = \begin{bmatrix} \int x_i^2 dm & \int x_i y_i dm & \int x_i z_i dm & \int x_i dm \\ \int x_i y_i dm & \int y_i^2 dm & \int y_i z_i dm & \int y_i dm \\ \int x_i z_i dm & \int y_i z_i dm & \int z_i^2 dm & \int z_i dm \\ \int x_i dm & \int y_i dm & \int z_i dm & \int dm \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

Келесі формуламен өрнектелген $\mathbf{J}_{ij}$ инерция тензорын пайдалансақ

$$\mathbf{J}_{ij} = \int [\delta_{ij} [\sum_k x_k^2] - x_i x_j] dm \quad (2.73)$$

Онда $\mathbf{J}_i$ матрицасын инерция тензоры мен массалар центрінің координаталары арқылы да жазуға болады. Мұндағы δ_{ij} — Кронекер символы. Егер $\bar{\mathbf{r}}_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i, 1)^T$ деп i -ші буынның массалар центрінің біртекті координаталарын белгілесек, $\mathbf{J}_i$ матрицасының элементтерін осы шамалар арқылы ықшам түрде өрнектеуге болады.

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \frac{-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}}{2} & I_{xy} & I_{xz} & m_i \bar{x}_i \\ I_{xy} & \frac{I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}}{2} & I_{yz} & m_i \bar{y}_i \\ I_{xz} & I_{yz} & \frac{I_{xx} + I_{yy} - I_{zz}}{2} & m_i \bar{z}_i \\ m_i \bar{x}_i & m_i \bar{y}_i & m_i \bar{z}_i & m_i \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

Келесі кезекте $K_{ijk} = \frac{J_{jk}}{m_i}$, және $\bar{\mathbf{r}}_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i, 1)^T$ - i -ші буынның массалар центрінің радиус – векторы екенін ескерсек Онда Гуманоид қолының толық кинетикалық энергиясы келесі түрде өрнектеледі:

$$\begin{aligned} K &= \sum_{i=1}^n K_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Tr [\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \mathbf{U}_{ip} \mathbf{J}_i \mathbf{U}_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i [Tr (\mathbf{U}_{ip} \mathbf{J}_i \mathbf{U}_{ir}^T) \dot{q}_p \dot{q}_r] \end{aligned} \quad (2.75)$$

$\mathbf{J}_i$ шамасы i -ші буынның орнымен жылдамдығына емес тек қана i -ші буынының массалар таралуына тәуелді. Бұл бізге $\mathbf{J}_i$ матрицасын бір рет ғана есептеп, кейіннен гуманоид қолының кинетикалық энергиясын есептеуге мүмкіндік береді. Әрбір i -ші буынға қатысты параллелепипед пішінді буындарды $\mathbf{J}_i$ матрицасын **2-қосымшадан** көруге болады. Робот қол буындарының геометриялық пішіні күрделі болғандықтан, олардың массалық-инерциялық параметрлері SolidWorks 2025 бағдарламасында әр буынның материалы мен оған бекітілген жергілікті координаталар жүйесі негізінде анықталды. Бұл туралы мен алда динамика есебін нақты менің робот қолының эксперименттік прототипінің динамикасын шығаруға арналған бөлімде толық тоқталатын боламын.

2.5.2. Гуманоид робот қолының потенциалдық энергиясы.

Гуманоид робот қолының толық потенциалдық энергиясын P деп, ал нақты i -ші буын үшін P_i деп белгіленеді. Сонда:

$$P_i = -m_i g \bar{\mathbf{r}}_i = -m_i g (\mathbf{A}_i^T \bar{\mathbf{r}}_i), i = 1, 2, \dots, n \quad (2.76)$$

Барлық буындардың потенциалдық энергиясын қоссақ:

$$P = \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{j=1}^n -m_i g (\mathbf{A}_i^T \bar{\mathbf{r}}_i) \quad (2.77)$$

Бұл жердегі $g = (g_x, g_y, g_z, 0)$ базалық координаталар жүйесіндегі гравитациялық үдеудің векторы. Жердегі координаттар жүйесінде $g = (0, 0, -|g|, 0)$, ал жердің бетіндегі еркін түсу үдеуі $g = 9.8062 \text{ м/с}^2$

2.5.3. Гуманоид робот қолының қозғалысының тендеуі

Алдыңғы кинетикалық энергия (2.75) мен потенциалдық энергия (2.77) түрлендірулерді пайдаланып келесі Лагранж функциясы табылады.

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i [Tr(\mathbf{U}_{ij} \mathbf{J}_i \mathbf{U}_{ik}^T) \dot{q}_j \dot{q}_k] + \sum_{i=1}^n m_i g (\bar{\mathbf{A}}_i^T \bar{\mathbf{r}}_i) \quad (2.78)$$

Енді осы функцияны Лагранж тендеуіне қойсақ гуманоид робот-қолының қозғалтқышы қозғалту керек жалпылама моменттінің түрлендіруін табамыз.

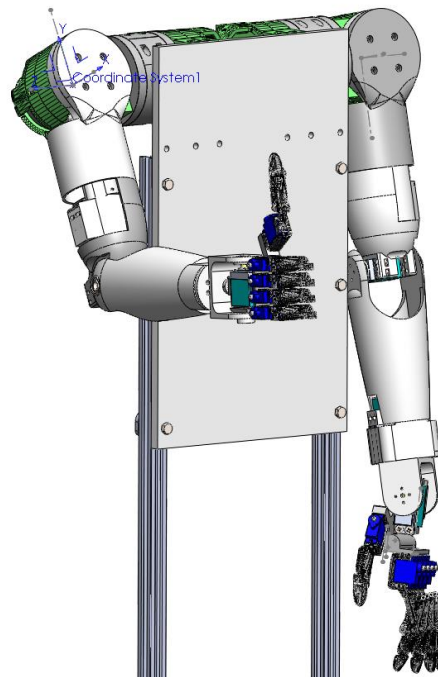
$$\tau_i = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^i Tr(\mathbf{U}_{jk} \mathbf{J}_i \mathbf{U}_{ji}^T) \dot{q}_k + \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^j \sum_{m=1}^j Tr(\mathbf{U}_{jkm} \mathbf{J}_i \mathbf{U}_{ji}^T) \dot{q}_k \dot{q}_m + \sum_{j=i}^n m_j g \mathbf{U}_{ji}^T \bar{\mathbf{r}}_j^T, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.79)$$

Енді алдыңғы барлық қажетті түрлендірулер нәтижесінде әр i -ші буын үшін жалпылама моменттерді табамыз. Осы толық ашылған $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6$ үшін аналитикалық өрнектер 3-қосымшада келтірілген.

2.6. Робот қолының эксперименттік прототипінің үшөлшемді нұсқасы мен динамикасы.

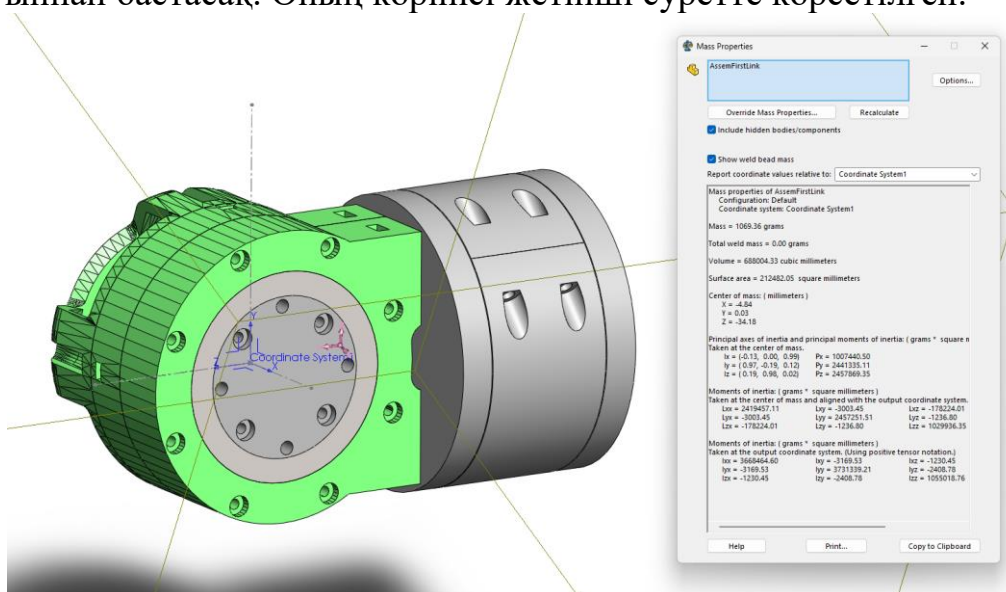
Енді екі мақсатқа арналған робот қолының эксперименттік прототипі SolidWorks 2025 Premium бағдарламасында жобаланды және 3D-принтер арқылы шығарып сынақтан өткізілді. Гуманоид робот қолының негізгі жүктемесі иығына түскендіктен иық бөлігінің үш нұсқасы әзірленді. Себебі, біріншісінде негізгі буынмен 1-буынды байланыстыратын бөлшек PLA пластикінен болғаннан кейін иілу пайда болды. Екіншісінде червякті редуктор арқылы энкодері бар щеткалы GoBilda қозғалтқышын пайдаланылды. Үшіншісінде әлемде барлық жаңадан шығып жатқан гуманоидты роботтарда,

үйде қызмет көрсететін роботтарда, тұрмыстық техникада, электрлі самокаттарда, дрондарда және басқа да құрылғыларда қолданылатын щеткасыз қозғалтқыш қолданылды. Робот қолының жалпы көрінісі алтыншы суретте көрсетілген.



Сурет 6 – Робот қолының эксперименттік прототипінің 3D нұсқасы

Осы робот қолының динамикасына қажетті әр буынның массалары, масса центрі және инерция тензоры SolidWorks 2025 бағдарламасынан алу үшін әр буынды жеке-жеке құрастырып әр буынға Денавит–Хартенберг координаталар жүйесі бекітілді және нақты материалдары енгізілді. SolidWorks 2025 бағдарламасының материалдар кітапханасында PLA пластикі дайын материал ретінде болмағандықтан, оның параметрлері қолмен енгізілді. Олар: тығыздығы 1240 кг/м^3 , серпімділік модулі 3000 МПа, Пуассон коэффициенті 0.35 және созылуға беріктік шегі 60 МПа. Келесі енді жеке жеке буындарға тоқталсақ. Бірінші буыннан бастасақ. Оның көрінісі жетінші суретте көрсетілген.



Сурет 7 – Робот қолының бірінші буынының 3D нұсқасы

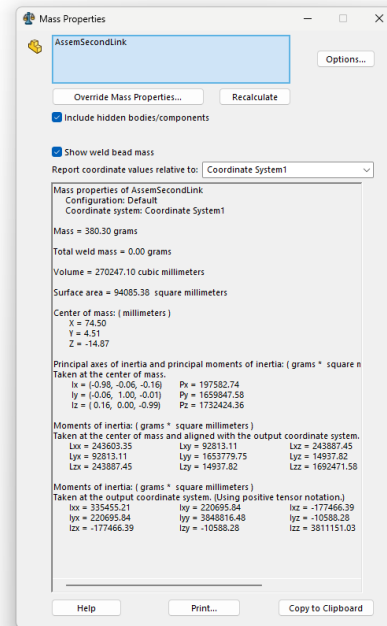
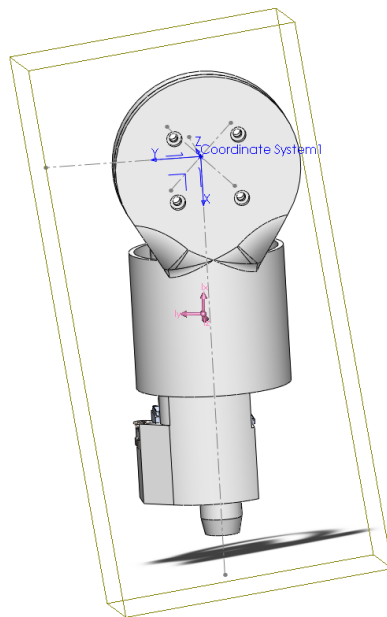
Бірінші және екінші буындарды айналдыратын BLDC қозғалтқышпен бірге қолдану үшін аралық домалау денелері бар толқынды редуктор (АДДБТР) әзірленді. Себебі, бұл редуктордың келесі артықшылықтары бар. Олар: үлкен моментті шағын габариттен алуға болады; бір сатылы құрылымда жоғары редукция қатынасын қамтамасыз етеді; люфт (backlash) өте аз, кей жағдайда нөлге жуық; жоғары ресурс және энергия тиімділігі (ПЭК) жоғары. Осы робот қолының иығына керегі де осы. Осы АДДБТР-ді роликті түрінде таңдалды, себебі роликтерде жанасу сызықтыққа жақын болғандықтан жүк көтергіштік қабілет артады. Редуктордың құрылымы эксцентрик, сепаратор, роликтер, венец, корпус және тіректерден тұрады. Енді осы редуктордың жұмыс істеу принципі келесідей. Эксцентрик айналғанда, роликтер орналасқан венец бойында екі қарсы аймақта жүктелу аймақтары қалыптасады. Жүктелген аймақ эксцентрикпен бірге айналып, жүгірмелі жанасу (контакт) толқынын тудырады. Жүктелген аймақта роликтер сақина профилімен жанасып, нормаль күштің әсерінен тангенциал құраушы күш пайда болады, сонан соң жетектелетін сақина аз бұрышқа ығысады. Нәтижесінде жетекші білік бір айналғанда жетектелетін элемент өте аз бұрышқа ығысады, бұл жоғары редукцияны береді [54]. Енді осы бірінші буынның массасын, масса центрін және инерция тензорын SolidWorks 2025 бағдарламасынан аламыз. Өлшем бірліктері масса - кг, масса центрі - м және инерция тензоры - кг·м²:

$$m_1 = 1.06936$$

$$r_1 = \begin{bmatrix} -0.00484 \\ 0.00003 \\ -0.03418 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0.00241945711 & -0.00000300345 & -0.00017822401 \\ -0.00000300345 & 0.00245725151 & -0.00000123680 \\ -0.00017822401 & -0.00000123680 & 0.00102993635 \end{bmatrix}$$

Екінші буынды айналдыратын қозғалтқыш пен оның редукторы тура бірінші буындағыдай. Екінші буынның 3D нұсқасы сегізінші суретте көрсетілген.



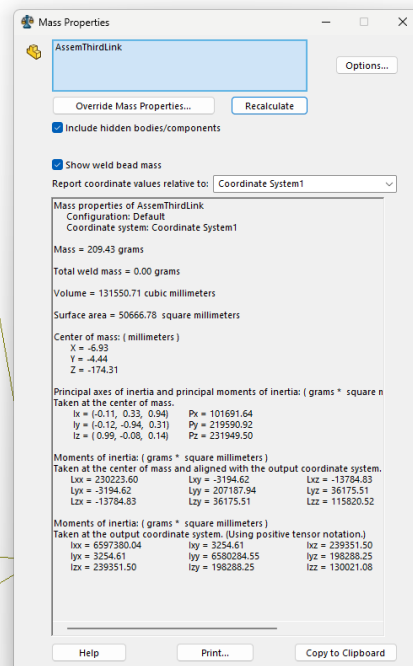
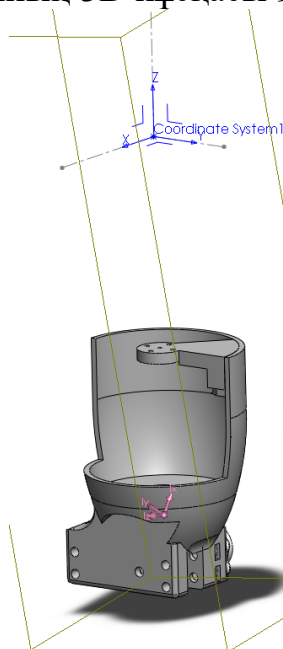
Сурет 8 – Робот қолының екінші буынының 3D нұсқасы
Енді осы екінші буынның параметрлері:

$$m_2 = 0.38030$$

$$r_2 = \begin{bmatrix} 0.0745 \\ 0.00451 \\ -0.01487 \end{bmatrix}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 0.00024360335 & 0.00009281311 & 0.00024388745 \\ 0.00009281311 & 0.00165377975 & 0.00001493782 \\ 0.00024388745 & 0.00001493782 & 0.00169247158 \end{bmatrix}$$

Үшінші буынның 3D нұсқасы 9-суретте көрсетілген.



Сурет 9 – Робот қолының үшінші буынының 3D нұсқасы

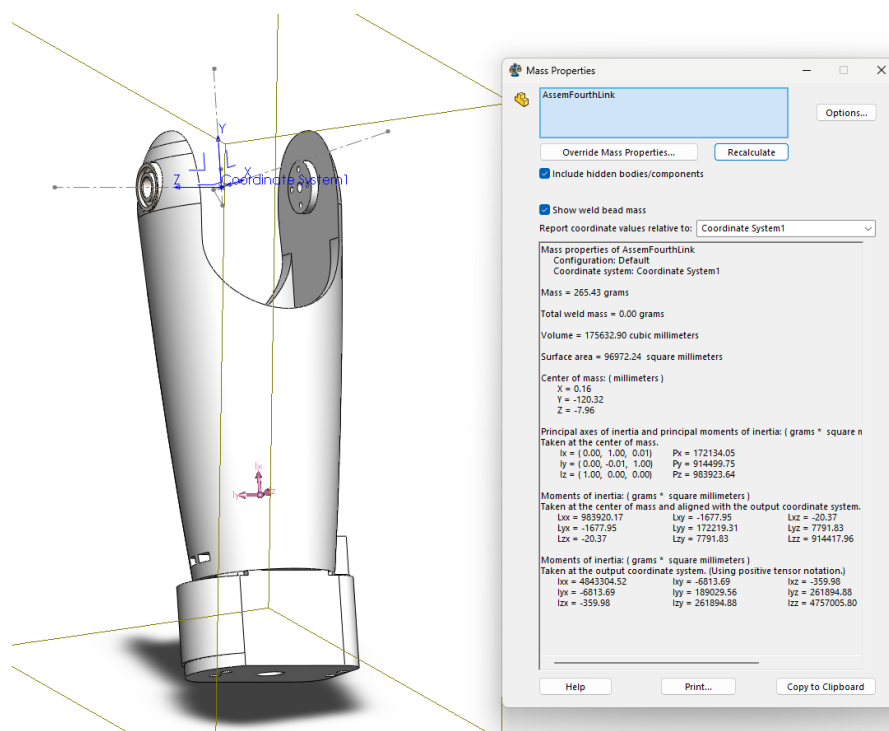
Енді осы үшінші буынның массалық-инерциялық параметрлері төмендегідей:

$$m_3 = 0.20943$$

$$r_3 = \begin{bmatrix} -0.00693 \\ -0.00444 \\ -0.17431 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 0.00230223360 & -0.00000319462 & -0.00001378483 \\ -0.00000319462 & 0.00020718794 & 0.00003617551 \\ -0.00001378483 & 0.00003617551 & 0.00011582052 \end{bmatrix}$$

Төртінші буынның 3D нұсқасы 10-суретте көрсетілген.



Сурет 10 – Робот қолының төртінші буынының 3D нұсқасы

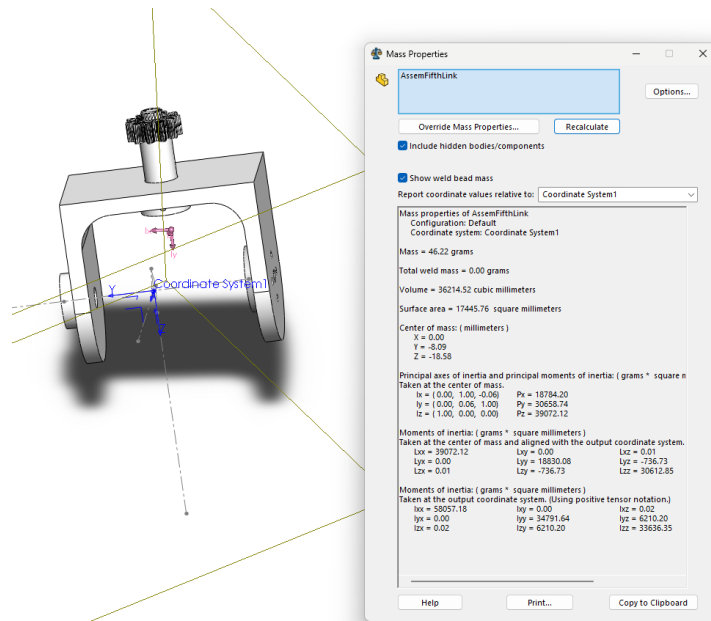
Төртінші буынның массалық-инерциялық параметрлері төмендегідей:

$$m_4 = 0.26543$$

$$r_4 = \begin{bmatrix} 0.00016 \\ -0.12032 \\ -0.00796 \end{bmatrix}$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 0.00098392017 & -0.00000167795 & -0.00000002037 \\ -0.00000167795 & 0.00017221931 & 0.00000779183 \\ -0.00000002037 & 0.00000779183 & 0.00091441796 \end{bmatrix}$$

Бесінші буынның 3D нұсқасы 11-суретте көрсетілген.



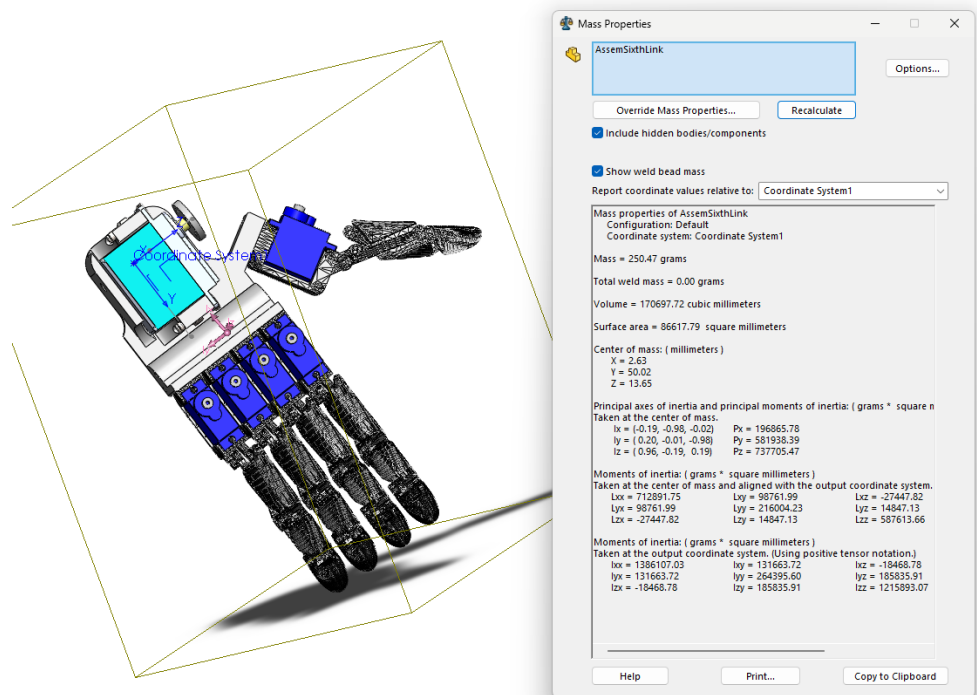
Сурет 11 – Робот қолының бесінші буынының 3D нұсқасы
Бесінші буынның массалық-инерциялық параметрлері төмендегідей:

$$m_5 = 0.04622$$

$$r_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.00809 \\ -0.01858 \end{bmatrix}$$

$$I_5 = \begin{bmatrix} 0.00003907212 & 0 & 0.000000000001 \\ 0 & 0.00001883008 & -0.00000073673 \\ 0.000000000001 & -0.00000073673 & 0.00003061285 \end{bmatrix}$$

Алтыншы буынның 3D нұсқасы 12-суретте көрсетілген.



Сурет 12 – Робот қолының алтыншы буынының 3D нұсқасы.

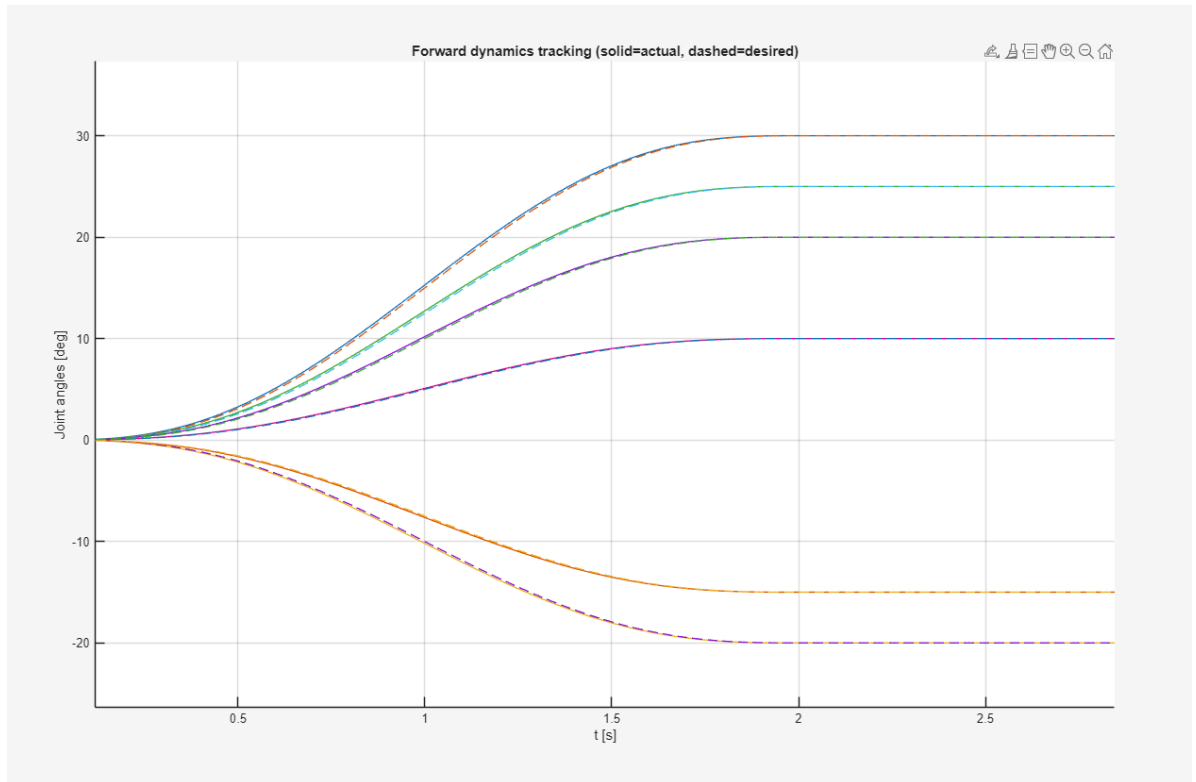
Алтыншы буынның массалық-инерциялық параметрлері төмендегідей:

$$m_6 = 0.25047$$

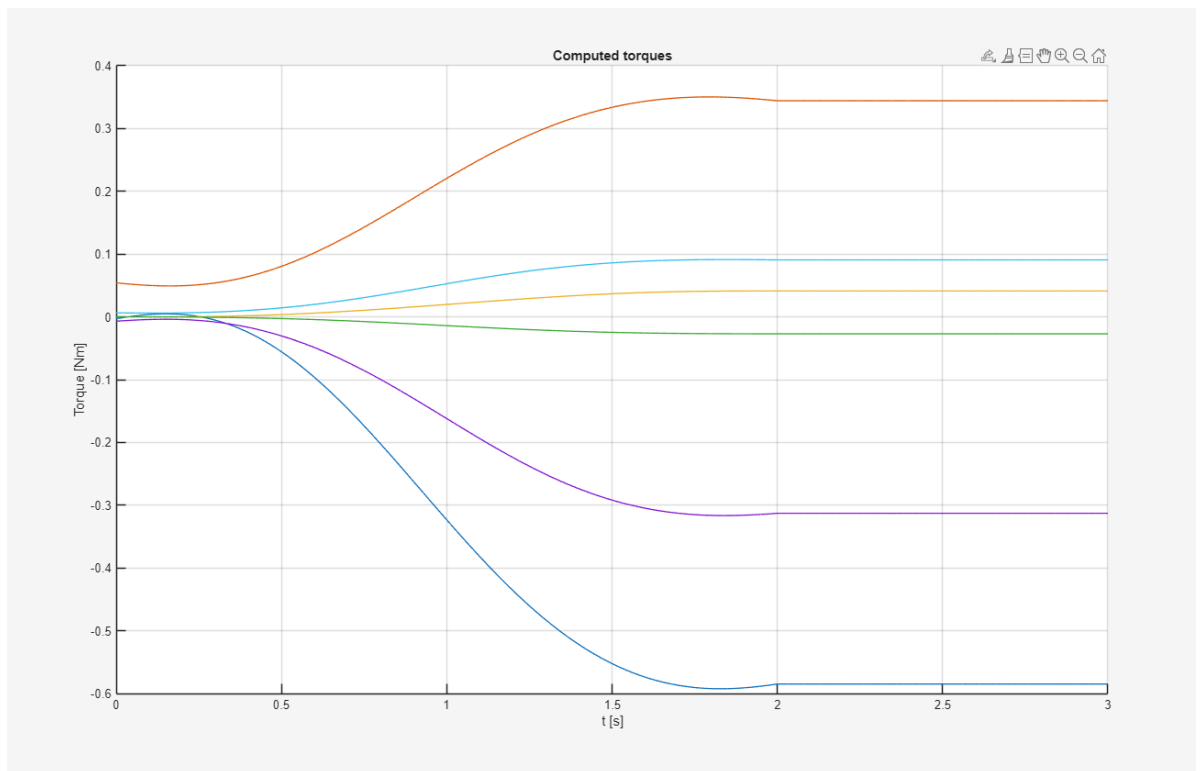
$$r_6 = \begin{bmatrix} 0.00263 \\ 0.05002 \\ 0.01365 \end{bmatrix}$$

$$I_6 = \begin{bmatrix} 0.00071289175 & 0.00009876199 & -0.00002744782 \\ 0.00009876199 & 0.00021600423 & 0.00001484713 \\ -0.00002744782 & 0.00001484713 & 0.00058761366 \end{bmatrix}$$

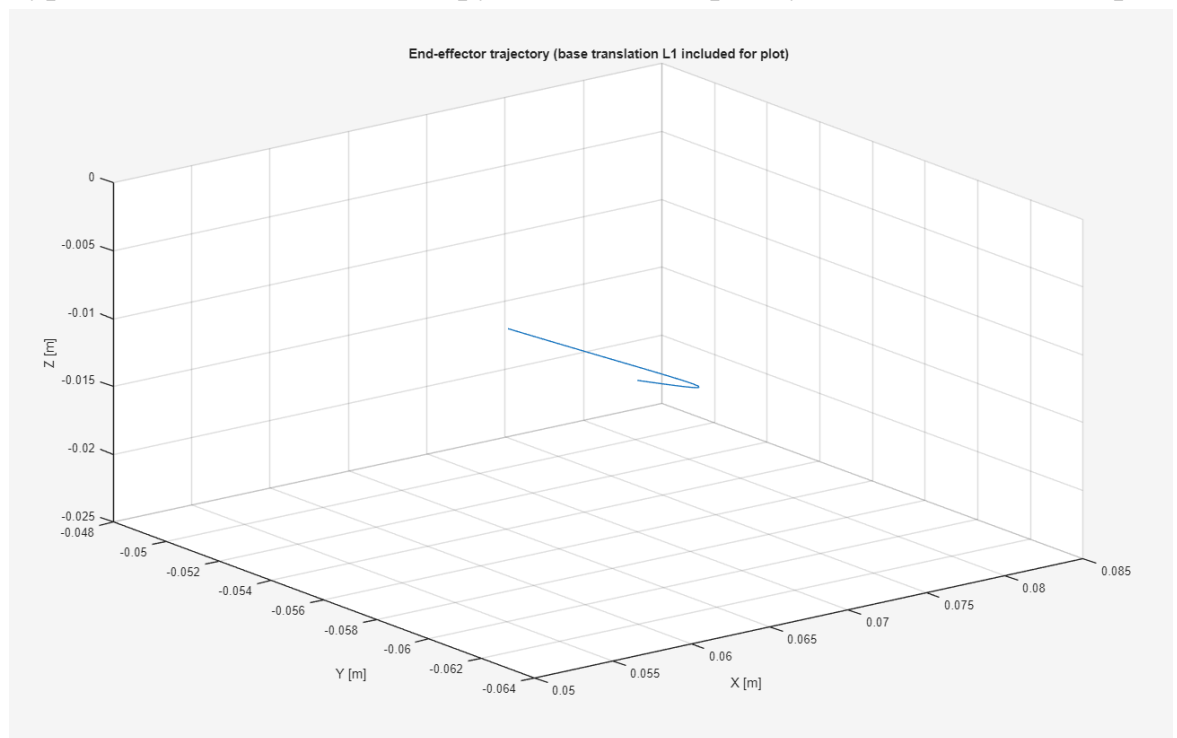
Енді алынған кинематикалық және инерциялық параметрлерді, яғни массалары, масса центрлері және инерция тензорларын пайдалана отырып, MATLAB R2025b ортасында робот қолының кері және тура динамикасы есептеулері іске асырылды. Сонымен қатар берілген траекторияны дәл қадағалау мақсатында есептелген моментті басқару (computed-torque control) әдісіне негізделген басқару схемасы модельденіп, сандық симуляция жүргізілді. Осы бағдарламалау кезінде қолданылатын робот қолының траекториясын жоспарлау әдістері және есептелген моментті басқару әдісі жеке тарауларда қарастырылады. Нәтижелер ретінде роботтың қозғалысы, буындық бұрыштардың уақыттық өзгерісі, басқарушы моменттер және соңғы атқарушы органның кеңістіктік траекториясы графиктер мен 3D-визуализация арқылы келесі он үшінші, он төртінші және он бесінші суреттерде көрсетілген. Бағдарламаның өзі төртінші қосымшада келтірілген.



Сурет 13 – Тура динамика симуляциясындағы буын бұрыштарының траекториялары.



Сурет 14 – Есептелген басқарушы моменттердің уақыт бойынша өзгерісі.



Сурет 15 – Соңғы атқарушы органның траекториясы

Енді осы бағдарламаның әрбір логикалық қадамы мен жұмыс істеу принципі түсіндіріледі. Негізгі `robot_dynamics_demo()` функциясы бүкіл симуляцияны басқарады. Ол роботтың параметрлерін көрсетілген, яғни буын ұзындықтары $L1$, $L2$, $L3$ метр, гравитациялық вектор g , Денавит–Хартенберг параметрлері, буындардың массалары, масса центрі және инерция тензорлары көрсетілген. Сондай-ақ кері динамика мысалы ретінде гравитациялық моменттер есептеледі, яғни робот қолын белгілі бір қалыпта ұстап тұру үшін

қажетті моменттер анықталады. Ол үшін бағдарламада буын позициялары q_test , жылдамдықтарын $qd_test = \text{zeros}(6,1)$ және үдеулерін $qdd_test = \text{zeros}(6,1)$ осылай алынды. Жылдамдықтар мен үдеулер нөлге тең болғандықтан, бұл есептеу тек гравитациялық моменттерді анықтауға бағытталған. Содан кейін $\tau_g = \text{inverse_dynamics}()$ функциясы шақырылды. Бұл функция берілген буын позициялары, жылдамдықтары және үдеулері үшін роботты осы күйде ұстап тұруға қажетті буын моменттерін (τ_g) есептейді. Кейін есептелген гравитациялық моменттер $\text{disp}()$ арқылы консольге шығарылады.

Келесі робот қолының белгілі бір бастапқы нүктеден мақсатты нүктеге қалай қозғалатынын симуляциялаймыз, бұл үшін Computed Torque Control (СТС) әдісі қолданылды. Симуляциялау үшін бірінші симуляция параметрлерін береміз. Олар:

- Симуляцияның уақыт қадамы (time step) 0.01 секундқа тең, $dt = 0.01$.
- Симуляцияның жалпы уақыты 3.0 секунд, $T_{sim} = 3.0$.
- $t = (0:dt:T_{sim})$ Симуляция уақытының векторын 0-ден T_{sim} -ге дейін dt қадамымен деп аламыз.

Келесі параметрлер траекторияны жоспарлауға қажетті параметрлер. Бұл траекторияның қалай және қандай әдіспен жоспарланатыны келесі тарауда толық қарастырылады. Енді параметрлерді жазсақ:

- Робот қолдың бастапқы буын позициялары радианмен $q_start = \text{deg2rad}([0;0;0;0;0;0])$.
- Робот қолдың жетуі тиіс мақсатты буын позициялары $q_goal = \text{deg2rad}([30;-20;25;10;-15;20])$.
- Роботтың бастапқыдан мақсатты позицияға жетуіне арналған қозғалыс уақыты $T_{move} = 2.0$.

Келесі бақылаушы коэффициенттер K_p пропорционалдық бақылаушының коэффициенттері, яғни қателе пропорционал әсер ететін коэффициенттер және K_d дифференциалдық бақылаушының коэффициенттері, яғни қатенің өзгеру жылдамдығына пропорционал әсер ететін коэффициенттер. Екеуі есептелген моментті басқару схемасының негізгі бөлігі ретінде қолданылады. Бұл коэффициенттер роботтың берілген траекторияны дәл және орнықты бақылауын қамтамасыз ететін ПД (Пропорционалды-Дифференциалды) бақылаушыны құрайды. Бұлар туралы алдағы жеке тарауда жазылған. Содан кейін симуляция барысында әр уақыт қадамындағы буын позицияларын, қажетті позицияларды, есептелген моменттерді және соңғы атқарушы органның позицияларын сақтау үшін нөлдермен толтырылған инициализацияланған массивтер енгізіледі. Одан кейін роботтың бастапқы күйі $state = [q_start; \text{zeros}(n,1)]$ түрінде анықталады. Бұл вектор робот қолының бастапқы буын позициялары мен бастапқы жылдамдықтарын сипаттайды. Келесі симуляция циклін $\text{for } k=1:\text{length}(t) \dots \text{end}$ деп берілді. Бұл цикл симуляцияның негізгі бөлігі. Ол Рунге-Кутта төртінші ретті интеграция әдісін қолданып, роботтың күйін уақыт бойынша жаңартады. Осы цикл ішінде $state_derivative$ функциясы

төрт рет шақырылып, Рунге–Кутта 4-реттік әдісінің k_1 , k_2 , k_3 , k_4 коэффициенттері есептеледі. Бұл функция берілген күй үшін күй туындысын, яғни жылдамдықтар мен үдеулерді қайтарады. Күйді жаңарту $state = state + (dt/6)*(k_1 + 2*k_2 + 2*k_3 + k_4)$ формуласы арқылы роботтың келесі уақыт қадамындағы позициясы мен жылдамдығы есептеледі. Әр қадамдағы буын позициялары, қажетті позициялар, моменттер және соңғы атқарушы органның позициялары сәйкесінше осы Q , Q_{des} , TAU және PEE массивтерінде сақталады. Симуляция аяқталғаннан кейін нәтижелерді визуалды түрде талдау үшін бірнеше графиктер салынады. Яғни әр буын бойынша нақты тұтас сызық және қажетті үзік сызық бұрыштары уақытқа байланысты көрсетіледі. Бұл бақылаушының траекторияны қаншалықты дәл бақылағанын көрсетеді. Ал моменттер графигі әрбір буынға қолданылған есептелген моменттер уақытқа байланысты көрсетіледі. Бұл басқарушының қандай моменттерді қолданғанын түсінуге мүмкіндік береді. Осылардың арқасында робот қолының соңғы атқарушы органының 3D кеңістіктегі қозғалыс жолы көрсетіледі. Бұл роботтың жұмыс кеңістігіндегі қозғалысын визуалды түрде бағалауға көмектеседі. Осы айтылғандарды орындауға `robot_dynamics_demo()` функциясының ішінде робот динамикасын есептеу үшін бірнеше көмекші функциялар бар. Олар `dh_A(theta, d, a, alpha)` - Denavit-Hartenberg түрлендіру матрицасы. Осы функцияның мақсаты Denavit-Hartenberg (DH) параметрлері негізінде бір буынның координаталық жүйесінен келесі буынның координаталық жүйесіне түрлендіру матрицасын 4×4 есептеу. Бұл матрица роботтың әр буын бойынша кеңістіктегі орналасуын сипаттайды. θ және α бұрыштарының косинус және синус мәндерін есептеп, стандартты DH формуласы бойынша 4×4 түрлендіру матрицасын құрады. Сонымен қатар `fk_all(q, theta_offsets, alpha, a, d)` - барлық буындар үшін тура кинематика. Бұл функцияның мақсаты — робот қолының берілген буын позициялары q үшін әрбір буынның кеңістіктегі орналасуын, яғни позициясы мен бағытын есептеу. Бұл роботтың базалық кадрынан әрбір буынның кадрына дейінгі түрлендіру матрицаларын, буын позицияларын және буын осьтерінің бағыттарын қайтарады. Бұл функцияның жоғарыда аталған есептерді қандай ретпен орындайтынын кезең-кезеңімен қарастырайық. Бірінші базалық кадрды бірлік матрицасымен инициализациялайды. Екінші әрбір буын үшін циклде `dh_A` функциясын қолданып, буынаралық түрлендіру матрицасын есептейді. Үшінші қадамда осы матрицаларды тізбектей көбейту арқылы базалық кадрдан әрбір буын кадрына дейінгі жалпы түрлендіру матрицасы табылады. Төртінші осы матрицалардан буын позицияларын p және z -осьтерінің бағыттарын бөліп алады.

Келесі функция — `end_effector_pos(q, theta_offsets, alpha, a, d)`, ол соңғы атқарушы органның позициясын есептейді. Бұл функцияның мақсаты — роботтың соңғы атқарушы органының 3D кеңістіктегі позициясын есептеу. Ол үшін `fk_all` функциясын шақырып, барлық буындардың позицияларын алады және олардың ішінен соңғы атқарушы органның позициясын қайтарады.

Келесі функция — `com_pos_and_jac(q, link_i, theta_offsets, alpha, a, d, rc)`, ол масса центрінің позициясы мен Якобианын есептейді. Бұл функцияның

мақсаты — робот қолының белгілі бір буынының масса центрінің позициясын p_c , сондай-ақ осы масса центрі үшін сызықтық J_v және бұрыштық J_ω Якобиан матрицаларын есептеу. Якобиан матрицалары буын жылдамдықтарын соңғы атқарушы органның немесе масса центрінің сызықтық және бұрыштық жылдамдықтарына түрлендіреді. Ол үшін `fk_all` функциясын қолданып, барлық буындардың кинематикалық ақпаратын алады. Кейін буынның айналу матрицасын бөліп алып, масса орталығының позициясын есептейді. Одан кейін әрбір буын үшін циклде сызықтық және бұрыштық Якобиан элементтерін есептейді. Бұл үшін буынның z-осінің бағыты мен масса орталығына дейінгі векторлық көбейтінді қолданылады.

Келесі функция `mass_matrix(q, ..., Ic)` масса матрицасы. Бұл функцияның мақсаты — роботтың масса матрицасын M есептеу. Бұл матрица роботтың инерциялық қасиеттерін сипаттайды және буын үдеулері мен моменттері арасындағы байланысты көрсетеді. Осы функцияның жұмыс жасау қадамдары бірінші нөлдермен толтырылған 6×6 масса матрицасын инициализациялайды. Кейін әрбір буын үшін циклде `com_pos_and_jac` функциясын шақырып, Якобиандарды және айналу матрицасын алады. Кейін буынның инерция тензоры базалық координаталар жүйесіне түрлендіреді. Кейін әрбір буынның массасы мен инерция тензорының үлесін жалпы масса матрицасына қосады. Бұл кинетикалық энергия формуласына негізделген және матрицаның симметриялы болуын қамтамасыз етеді.

Келесі функция — `gravity_vector(q, ..., g0)`, ол гравитациялық векторды есептейді. Бұл функцияның мақсаты — робот қолына әсер ететін гравитациялық күштерден туындайтын буын моменттерінің g_q векторын есептеу. Осы функцияның жұмыс істеу барысы бірінші нөлдермен толтырылған 6×1 гравитациялық векторды инициализациялайды. Кейін әрбір буын үшін циклде `com_pos_and_jac` функциясын шақырып, сызықтық Якобианды алады.

Келесі функция — `coriolis_matrix(q, qd, ..., Ic)`, ол Кориолис матрицасын есептейді. Бұл функцияның мақсаты — роботтың Кориолис матрицасын C есептеу. Бұл матрица буын жылдамдықтарына байланысты центрден тепкіш және Кориолис күштерінен туындайтын моменттерді сипаттайды. Бұл матрицаның жұмыс жасау барысы бірінші масса матрицасының буын позициялары бойынша туындыларын сандық дифференциация арқылы есептейді. Осы туындыларды және буын жылдамдықтарын қолданып, Кристоффель символдары арқылы Кориолис матрицасының элементтерін есептейді.

Келесі маңызды функциялардың бірі кері динамика `inverse_dynamics(q, qd, qdd, ..., g0)`. Бұл функцияның мақсаты — роботтың берілген буын позициялары q , жылдамдықтары qd және үдеулері qdd үшін осы қозғалысты жүзеге асыруға қажетті буын моменттерін τ есептеу. Ол үшін `mass_matrix`, `coriolis_matrix` және `gravity_vector` функцияларын шақырып, сәйкес матрицалар мен векторларды алады. Кейін робот қолының динамикасының негізгі теңдеуін қолданып, қажетті моменттерді есептейді.

Осындай кейінгі функция тура динамика `forward_dynamics(q, qd, tau, ..., g0)`. Бұл функцияның мақсаты — роботтың берілген буын позициялары, жылдамдықтары және қолданылған буын моменттері үшін буын үдеулерін *qdd* есептеу. Ол үшін `mass_matrix`, `coriolis_matrix` және `gravity_vector` функцияларын шақырып, сәйкес матрицалар мен векторларды алады. Содан кейін динамика теңдеуін буын үдеулеріне қатысты шешу арқылы $\ddot{q}$ есептеледі. MATLAB ортасында $\mathbf{M} \backslash (\cdot)$ операторы матрицалық бөлуді (сызықтық теңдеулер жүйесін шешуді) білдіреді және $\mathbf{M}^{-1}$ матрицасын тікелей есептеуге қарағанда есептеу тұрғысынан тұрақтырақ.

Келесі робот қолының траекторияны жоспарлаудағы маңызды функция квинтикалық траектория генераторы `quintic(t, T, q0, qf)`. Бұл функцияның мақсаты — робот буындары үшін бастапқы q_0 және соңғы q_f позициялар арасында тегіс қозғалыс траекториясын құру, яғни позицияларды q , жылдамдықтарды qd және үдеулерді *qdd* генерациялау. Квинтикалық полиномдар қозғалыстың басында және соңында жылдамдық пен үдеудің нөлге тең болуын қамтамасыз етеді, бұл нақты роботтар үшін маңызды. Ол үшін бірінші уақытты жалпы қозғалыс уақытына қатысты нормалайды. Кейін квинтикалық полиномның негізгі функциясын (*h*) және оның бірінші (*hd*) және екінші (*hdd*) туындыларын есептейді. Сөйтіп осы функцияларды қолданып, бастапқы және соңғы позициялар арасындағы траекторияны, жылдамдықты және үдеуді есептейді.

Ендігі соңғы функция бұл күй туындысы `state_derivative(state, t, q0, qf, Tmove, Kp, Kd, ..., g0)`. Бұл функцияның мақсаты — симуляцияның ағымдағы күйі *state* үшін күй туындысын, яғни буын жылдамдықтары мен үдеулерін, сондай-ақ есептелген моменттер мен қажетті позицияларды *qdes* анықтау. Бұл функция Рунге-Кутта интеграциясы үшін негізгі блок болып табылады. Енді осы функцияның жұмыс істеу ретін жазайық. Бірінші күй векторынан буын позициялары мен жылдамдықтарын бөліп алады. Кейін `quintic` функциясын қолданып, қажетті позицияны, жылдамдықты және үдеуді есептейді. Есептелген моментті басқару схемасының v айнымалысын есептейді, бұл жерде ПД-бақылаушы қолданылады. Одан кейін `mass_matrix`, `coriolis_matrix` және `gravity_vector` функцияларын шақырып, сәйкес матрицалар мен векторларды алады. Роботқа қолданылатын басқару моменттерін есептелген моментті басқару формуласы бойынша есептейді. Кейін `forward_dynamics` функциясын қолданып, осы моменттердің әсерінен туындайтын буын үдеулерін табады. Одан кейін буын жылдамдықтары мен үдеулерін біріктіріп, күй туындысын *dst* қайтарады. Бұл шама симуляцияның келесі қадамын есептеу үшін қажет.

Қорытындылай келгенде бұл бағдарлама робот қолының динамикасының күрделі мәселелерін шешуге арналған толыққанды шешімді ұсынады. Ол Денавит–Хартенберг кинематикасынан бастап, Эйлер–Лагранж теңдеулеріне негізделген динамикалық модельдеуге дейін, сондай-ақ траекторияны жоспарлау мен есептелген моментті басқару сияқты озық басқару әдістерін қамтиды. Бағдарламаның әрбір бөлігі роботтың қозғалысын дәл сипаттауға және оны тиімді басқаруға бағытталған. Симуляция нәтижелерін визуалды

түрде көрсету арқылы, бұл бағдарламадағы және осы диссертациядағы әдістер гуманоид робот қолы мен қатар өндірістік роботтарға қолдануға болады.

3. Гуманоид робот қолының траекториясын жоспарлау әдістері

Гуманоид робот қолдарының қозғалысын басқарудың ең маңызды аспектілерінің бірі – траекторияны жоспарлау. Робот қолдың бір нүктеден екінші нүктеге қалай қозғалатынын анықтайтын алты негізгі әдісі егжей-тегжейлі осы тарауда жазылған.

3.1. Гуманоид робот қолының траекториясын жоспарлаудың негізгі ұғымдары

Ең бірінші негізгі үш терминдердің нақты қандай айырмашылығы бар екенін және бұл өте маңызды екенінен бастаған дұрыс. Бірінші жол (Path), бұл – роботтың соңғы атқарушы органы кеңістікте жүріп өтетін геометриялық сызық. Жол уақытқа тәуелді емес, ол тек «қайда бару керек» деген сұраққа жауап береді. Мысалы, түзу сызық, шеңбер немесе кез келген қисық. Екінші траектория, бұл – уақытқа тәуелді жол. Траектория «қайда бару керек» деген сұрақпен қатар, «қашан, қандай жылдамдықпен және қандай үдеумен» бару керектігін анықтайды. Яғни, траектория – бұл уақыт бойынша анықталған позиция, жылдамдық және үдеудің жиынтығы. Үшінші қозғалыс профилі (Motion Profile), бұл – траекторияның уақыт бойынша өзгеру сипаты, яғни жылдамдық пен үдеудің уақытқа тәуелділігін көрсететін графиктер. Мысалы, трапеция тәрізді жылдамдық профилі немесе S-тәрізді (тегіс) үдеу профилі. Жол, траектория және қозғалыс профилі ұғымдарының арасындағы негізгі айырмашылықтар 3-кестеде көрсетілген.

Кесте 3 – Траекторияны жоспарлаудың негізгі ұғымдарының өзара айырмашылықтары

Термин	Сипаттамасы	Мысал	Уақытқа тәуелділігі
Жол	Геометриялық орын	А нүктесінен В нүктесіне дейінгі түзу	Жоқ
Траектория	Уақыт бойынша анықталған жол	А-дан В-ға 2 секунд ішінде жету	Иә
Профиль	Жылдамдық пен үдеудің өзгеруі	Алғашқы 0.5 секундта үдеу, сосын тұрақты жылдамдық	Иә

Роботтың қозғалысын екі түрлі кеңістікте жоспарлауға болады:

Біріншісі — буындық кеңістік (Joint Space). Бұл жағдайда роботтың әрбір буынының бұрыштық позициясы $q(t)$ уақыт бойынша жоспарланады. Бұл есептеу тұрғысынан әлдеқайда жеңіл, себебі сингулярлық сияқты мәселелер туындамайды. Алайда, роботтың соңғы атқарушы органының кеңістіктегі жолы күрделі және болжауға қиын болуы мүмкін.

Екінші — декарттық кеңістік (Cartesian Space). Мұнда роботтың соңғы атқарушы органының кеңістіктегі координаталарын және оның бағдарын уақыт

бойынша жоспарланады. Бұл әдіс роботтың нақты бір геометриялық жолмен қозғалуы қажет болғанда қолданылады. Алайда, бұл әдіс кері кинематиканы есептеуді қажет етеді, бұл есептеу тұрғысынан күрделі және сингулярлық конфигурацияларда қиындықтар тудыруы мүмкін.

Траекторияның тегістігі – оның туындыларының жылдамдық, үдеу және серпіліс үздіксіздігімен анықталады. Неғұрлым жоғары ретті туындылар үздіксіз болса, соғұрлым траектория тегіс болады. Ең минималды талап бұл позицияның үздіксіздігі C^0 . Траекторияда үзілістер болмауы керек. Келесі талап — жылдамдықтың үздіксіздігі, яғни C^1 шарты. Бұл жылдамдықтың кенеттен секіріп өзгеруіне жол бермейді. Бұл роботтың буындарына шексіз үдеу түсірмеу үшін маңызды. Келесі бұл үдеудің үздіксіздігі C^2 . Үдеудің кенеттен өзгермеуі керек. Үдеудің секіруі серпілістің (jerк) шексіз болуына әкеледі. Серпіліс — үдеудің уақыт бойынша туындысы, яғни үдеудің өзгеру жылдамдығы. Жоғары серпіліс роботтың дірілдеуіне, механикалық тозуына және басқарудағы қателіктерге әкеледі.

Кесте 4 – Үздіксіздік шарттарының физикалық мағынасы және бұзылған кездегі салдары

Үздіксіздік	Физикалық мағынасы	Салдары (егер бұзылса)
C^1 жылдамдық	Шексіз үдеудің болмауы	Моторларға теориялық тұрғыдан шексіз момент қажет болады
C^2 үдеу	Шексіз серпілістің болмауы	Роботтың дірілдеуі, вибрация, механикалық тозу

Сондықтан, біздің мақсатымыз – кем дегенде C^2 үздіксіздігін қамтамасыз ететін траекторияларды құру. Бұл роботтың қозғалысының тегіс, дәл және қауіпсіз болуын қамтамасыз етеді.

Келесі бөлімдерде осы негіздерге сүйене отырып, траекторияны жоспарлаудың нақты алты әдісі қарастырылады.

3.2. Сызықтық интерполяция әдісі

Сызықтық интерполяция – екі нүкте арасындағы траекторияны жоспарлаудың ең қарапайым және интуитивті әдісі. Бұл әдіс көбінесе бірнеше аралық нүктелер арқылы өтетін траекторияны құру үшін қолданылады.

Гуманоид робот қолдың бір буынын q_0 бастапқы позициясынан q_1 соңғы позициясына T уақыт ішінде қозғалту мысалын қарастырайық. Сызықтық интерполяцияда буынның бұрыштық позициясы $q(t)$ уақытқа сызықты тәуелді болады. Буынның позициясын уақыттың кез келген t мезетінде (мұнда $0 \leq t \leq T$) келесі формуламен анықтауға болады:

$$q(t) = q_0 + (q_1 - q_0)(t/T) \quad (3.1)$$

Мұнда (t / T) мүшесі уақыттың нормаланған мәнін білдіреді, яғни t 0-ден T -ға өзгергенде, бұл мүше 0-ден 1-ге дейін сызықты түрде өседі.

Енді осы позиция теңдеуінен уақыт бойынша туынды алып, жылдамдық пен үдеуді табайық.

$$v(t) = \frac{dq(t)}{dt} = (q_1 - q_0)/T \quad (3.2)$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = 0 \quad (3.3)$$

Буын $t=0$ -ден $t=T$ -ға дейінгі аралықта тұрақты жылдамдықпен қозғалады. Қозғалыс кезінде үдеу нөлге тең.

Бір қарағанда, бұл өте жақсы сияқты көрінуі мүмкін. Алайда, ең үлкен мәселе $t=0$ және $t=T$ нүктелерінде жатыр. Робот $t=0$ -де тыныштық күйінен ($v=0$) кенеттен тұрақты жылдамдыққа $v(t) = (q_1 - q_0)/T$ секіреді. Дәл сол сияқты, $t=T$ -да тұрақты жылдамдықтан кенеттен нөлге түседі. Бұл жылдамдықтың үзілісін (discontinuity) тудырады.

Енді салдарына келетін болсақ. Жылдамдықтың лездік өзгеруі теориялық тұрғыдан шексіз үдеуді қажет етеді. Нақты өмірде ешқандай мотор шексіз үдеу бере алмайды. Практикада бұл роботтың қозғалысының басында және соңында қатты «серпіліске» (jerk) және дірілге әкеледі. Мұндай кенеттен болатын қозғалыстар роботтың механикалық бөліктерінің (редукторлар, мойынтіректер) тез тозуына себеп болады.

Егер бізге бірнеше аралық нүктелер ($q_0, q_1, q_2, \dots, q_n$) арқылы өту керек болса, әрбір сегмент үшін сызықтық интерполяцияны қолдана аламыз. Алайда, бұл жағдайда да әрбір аралық нүктеде жылдамдықтың бағыты мен шамасы кенеттен өзгереді, бұл тағы да дірілге әкеледі.

Енді осыны қорытындылай кетсек. Сызықтық интерполяцияның қарапайымдылығына қарамастан, оның елеулі кемшіліктері бар. Оны тек келесі жағдайларда ғана қолдануға болады. Бірінші өте баяу қозғалыстарда, яғни жылдамдық өте төмен болғанда, секірістің әсері азырақ болады. Екіншіден, траектория тегістігі шешуші рөл атқармайтын дәрекі қозғалыстарда бұл әдіс қолданылуы мүмкін. Мысалы, бөлшекті бір жерден екінші жерге жылдам тасымалдау. Үшінші басқа әдістермен біріктіргенде. Мысалы, сызықтық интерполяциямен анықталған жолды тегістейтін қосымша «бұрыштарды тегістеу» (corner blending) алгоритмдерімен бірге.

Келесі бөлімде осы жылдамдықтың үзілісі мәселесін шешетін, тегіс траекториялар құруға мүмкіндік беретін полиномдық интерполяция әдістері туралы болады.

3.3. Кубтық полиномдар әдісі

Сызықтық интерполяцияның негізгі кемшілігі – жылдамдықтың үзілісі екенін көрдік. Бұл мәселені шешу үшін күрделірек, бірақ әлдеқайда тегіс траекториялар беретін полиномдық функцияларды қолданамыз. Солардың ішіндегі ең кең таралғаны – кубтық полиномдар.

Бір траектория сегментін анықтау үшін кем дегенде төрт шартты қанағаттандыру керек. Олар бастапқы позиция (q_0), соңғы позиция (q_1), бастапқы жылдамдық (v_0) және соңғы жылдамдық (v_1). N шартты қанағаттандыру үшін бізге кем дегенде $N-1$ дәрежелі полином қажет. Бізде 4 шарт болғандықтан, кубтық полином керек. Бұл бізге позиция мен жылдамдықтың бастапқы және соңғы мәндерін толықтай басқаруға мүмкіндік береді. Кубтық полиномның жалпы түрі келесідей:

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \quad (3.4)$$

Мұндағы a_0, a_1, a_2, a_3 – табуымыз керек белгісіз коэффициенттер. Осы теңдеуден уақыт бойынша бірінші және екінші туындыларды алып, яғни жылдамдық пен үдеуді табамыз.

$$v(t) = \frac{dq}{dt} = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 \quad (3.5)$$

$$a(t) = \frac{d^2 q}{dt^2} = 2a_2 + 6a_3 t \quad (3.6)$$

Енді жоғарыда аталған төрт шартты пайдаланып, коэффициенттер анықталады. Уақыт $t=0$ -ден $t=T$ -ға дейін өзгереді деп есептейік. Бірінші бастапқы позиция және бастапқы жылдамдық шарты үшін, яғни $t=0$:

$$q_0 = a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 + a_3(0)^3, \text{ яғни } a_0 = q_0$$

$$v_0 = a_1 + 2a_2(0) + 3a_3(0)^2, \text{ яғни } a_1 = v_0$$

Алғашқы екі коэффициент бірден табылады. Енді қалған екеуін табу үшін соңғы шарттарды қолданамыз. Келесі соңғы позиция және жылдамдық шарты үшін, яғни $t = T$ үшін $q(T) = q_1$ және $v(T) = v_1$ деп аламыз.

$$q_1 = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3 \quad (3.7)$$

$$v_1 = a_1 + 2a_2 T + 3a_3 T^2 \quad (3.8)$$

Енді соңғы екі теңдеуге a_0 мен a_1 -дің табылған мәндерін қоямыз:

$$q_1 = q_0 + v_0 T + a_2 T^2 + a_3 T^3 \quad (3.9)$$

$$v_1 = v_0 + 2a_2 T + 3a_3 T^2 \quad (3.10)$$

Бұл a_2 мен a_3 -ке қатысты екі белгісізі бар сызықтық теңдеулер жүйесі. Оны шешейік:

$$q_1 - q_0 - v_0 T = a_2 T^2 + a_3 T^3 \quad (3.11)$$

$$v_1 - v_0 = 2a_2 T + 3a_3 T^2 \quad (3.12)$$

Екінші теңдеуден a_2 -ні тауып, біріншіге қою арқылы немесе матрицалық әдіспен шешсек, a_2 мен a_3 үшін келесі өрнектерді аламыз:

$$a_2 = (3(q_1 - q_0) - (2v_0 + v_1)T)/T^2 \quad (3.13)$$

$$a_3 = (-2(q_1 - q_0) + (v_0 + v_1)T)/T^3 \quad (3.14)$$

Көбінесе робот тыныштық күйінен бастап, тыныштық күйінде аяқтайды, яғни $v_0 = 0$ және $v_1 = 0$. Бұл жағдайда формулалар әлдеқайда ықшамдалады:

$$\begin{aligned} a_0 &= q_0 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= 3(q_1 - q_0)/T^2 \\ a_3 &= -2(q_1 - q_0)/T^3 \end{aligned}$$

Енді осыны талдап және мысал келтірейік. Позиция кубтық қисық, ал жылдамдық болса парабола. Ол v_0 -дан басталып, v_1 -де аяқталады. Жылдамдық енді үздіксіз (C^1 -тегіс), бұл сызықтық интерполяциядан әлдеқайда жақсы. Ал үдеуге келер болсақ, ол сызықтық функция. Ол $t=0$ -де $2a_2$ мәнінен басталып, $t=T$ -да $2a_2 + 6a_3T$ мәніне дейін сызықты өзгереді. Үдеу үздіксіз, бірақ оның басы мен соңында «өткір бұрыштары» бар. Бұл серпілістің (jerk) үзілісті екенін білдіреді. Серпіліс нөл емес тұрақты мәндер арасында секіреді. Мысалы гуманоид робот қолының бір буынын $q_0 = 10^\circ$ -тан $q_1 = 40^\circ$ -қа $T = 2$ секунд ішінде, тыныштық күйінен бастап $v_0=0$, тыныштық күйінде $v_1=0$ аяқтау керек болсын. Енді осының коэффициенттерін есептейік: $q_1 - q_0 = 30^\circ$, $a_0 = 10$, $a_1 = 0$, $a_2 = 3 * 30 / 2^2 = 90 / 4 = 22.5$, $a_3 = -2 * 30 / 2^3 = -60 / 8 = -7.5$

Сонда траектория теңдеулері:

$$\begin{aligned} q(t) &= 10 + 22.5t^2 - 7.5t^3 \\ v(t) &= 45t - 22.5t^2 \\ a(t) &= 45 - 45t \end{aligned}$$

Енді осыны тексерсек:

$$\begin{aligned} q(0) &= 10 \\ q(2) &= 10 + 22.5*4 - 7.5*8 = 10 + 90 - 60 = 40 \\ v(0) &= 0 \\ v(2) &= 45*2 - 22.5*4 = 90 - 90 = 0 \end{aligned}$$

Қорыта айтқанда кубтық полиномдар сызықтық интерполяцияға карағанда әлдеқайда жақсы, себебі олар жылдамдықтың үздіксіздігін (C^1 -тегістік) қамтамасыз етеді. Бұл роботтың қозғалысын анағұрлым тегіс етеді. Артықшылықтары жылдамдық профилі тегіс, кенеттен секірістер жоқ және есептеуге салыстырмалы түрде қарапайым. Кемшіліктері үдеу профилі сызықты, бірақ тегіс емес басы мен соңында «өткір бұрыштары» бар. Бұл

үдеудің кенеттен өзгеруі серпілістің үзілісті болуына әкеледі, бұл әлі де аздаған діріл тудыруы мүмкін. Егер бізге одан да тегіс, яғни үдеуі де тегіс қозғалыс қажет, яғни жоғары жылдамдықтағы дәл қимылдар және реабилитация кезіндегі өте жұмсақ қозғалыстарға. Енді сол мақсатқа жету үшін келесі бөлімде қарастырылатын бесінші дәрежелі полиномдарды қолдануымыз керек.

3.4. Бесінші дәрежелі полиномдар әдісі.

Кубтық полиномдар жылдамдықтың тегістігін (C^1 үздіксіздік) қамтамасыз еткенімен, үдеу профилінде әлі де үзілістер болды. Бұл жоғары жылдамдықты немесе өте нәзік қозғалысты қажет ететін жағдайларда діріл тудыруы мүмкін. Осы мәселені толығымен шешу үшін, яғни үдеуді де тегіс ету үшін (C^2 үздіксіздік), одан да жоғары дәрежелі полином – бесінші дәрежелі полиномды қолданамыз.

Тегіс, дірілсіз қозғалыс үшін тек позиция мен жылдамдықты ғана емес, сонымен қатар үдеуді де басқаруымыз керек. Әдетте, робот қозғалысты тыныштық күйінен бастап және тыныштық күйінде аяқтауы керек. Бұл бізге алты шарт береді. Бұл жағдайда алты шекаралық шарт беріледі: бастапқы позиция q_0 , бастапқы жылдамдық v_0 , бастапқы үдеу $\ddot{q}_0$, сондай-ақ соңғы позиция q_1 , соңғы жылдамдық v_1 және соңғы үдеу $\ddot{q}_1$. Алты шартты қанағаттандыру үшін бізге алдыңғы бөлімде айтқанымыздай бір дәреже төмен, яғни бесінші дәрежелі полином қажет.

Бесінші дәрежелі полиномның жалпы түрі:

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \quad (3.15)$$

Оның уақыт бойынша туындыларын алып жылдамдық пен үдеуді табамыз:

$$v(t) = \frac{dq}{dt} = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4 \quad (3.16)$$

$$a(t) = \frac{d^2 q}{dt^2} = 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3 \quad (3.17)$$

Енді коэффициенттерді табайық. Кубтық полиномдағы сияқты, алты шартты $t=0$ және $t=T$ нүктелерінде қолданып, a_0 -дан a_5 -ке дейінгі алты коэффициентті табамыз. $t=0$ нүктесіндегі шарттар:

$$q(0) = q_0 = a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 + a_3(0)^3 + a_4(0)^4 + a_5(0)^5$$

яғни $a_0 = q_0$ және осы сияқты $v(0) = v_0$, яғни $a_1 = v_0$, $a(0) = \ddot{q}_0$, яғни $a_2 = \frac{a_1}{2}$

Осылай алғашқы үш коэффициент оңай табылады. Енді $t=T$ нүктесіндегі шарттар:

$$q(T) = q_1, v(T) = v_1, a(T) = \ddot{q}_1 \quad (3.18)$$

Бұл шарттарды толық теңдеулерге қойып, a_3 , a_4 , a_5 коэффициенттеріне қатысты 3 белгісізі бар сызықтық теңдеулер жүйесін аламыз. Бұл жүйені шешу нәтижесінде коэффициенттердің толық формулалары шығады:

$$a_3 = (20(q_1 - q_0) - (8v_1 + 12v_0)T - (3\ddot{q}_0 - \ddot{q}_1)T^2)/(2T^3) \quad (3.19)$$

$$a_4 = (-30(q_1 - q_0) + (14v_1 + 16v_0)T + (3\ddot{q}_0 - 2\ddot{q}_1)T^2)/(2T^4) \quad (3.20)$$

$$a_5 = (12(q_1 - q_0) - 6(v_1 + v_0)T - (\ddot{q}_0 - \ddot{q}_1)T^2)/(2T^5) \quad (3.21)$$

Ең жиі кездесетін жағдай бұл робот қолы қозғалысты тыныштық күйінен бастап, тыныштық күйінде аяқтайды. Яғни, $v_0 = v_1 = 0$ және $\ddot{q}_0 = \ddot{q}_1 = 0$. Бұл жағдайда формулалар айтарлықтай ықшамдалады:

$$\begin{aligned} a_0 &= q_0 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= 10(q_1 - q_0)/T^3 \\ a_4 &= -15(q_1 - q_0)/T^4 \\ a_5 &= 6(q_1 - q_0)/T^5 \end{aligned}$$

Осы формулаларға талдау жасасақ позиция бесінші дәрежелі тегіс қисық. Жылдамдық төрт дәрежелі полином. Ол v_0 -дан басталып, v_1 -де аяқталады. Профильдің басы мен соңында еңісі нөлге тең, яғни қозғалыс өте тегіс басталып, тегіс аяқталады. Үдеу үшінші дәрежелі полином түрінде өзгереді. Ол $\ddot{q}_0$ -дан басталып, $\ddot{q}_1$ -де аяқталады. Ең бастысы, үдеу профилі енді толығымен тегіс, ешқандай «өткір бұрыштары» жоқ. Бұл C^2 -тегістікті білдіреді. Серпіліс енді парабола түрінде болады және ол үздіксіз. Бұл роботтың дірілсіз, өте тегіс қозғалуын қамтамасыз етеді.

Енді осы әдісті қорытындыласақ бесінші дәрежелі полиномдар – бір нүктеден екінші нүктеге өте тегіс қозғалысты жүзеге асыруға арналған «алтын стандарт» болып саналады. Артықшылықтары позиция, жылдамдық және үдеу профильдері толығымен үздіксіз және тегіс (C^2 -тегістік). Серпіліс шектелген және үздіксіз, бұл роботтың дірілін толығымен жояды. Жоғары жылдамдықты және жоғары дәлдікті талап ететін тапсырмалар үшін өте қолайлы. Реабилитация сияқты адаммен тікелей байланыста болатын қолданбаларда қауіпсіз және жайлы қозғалысты қамтамасыз етеді. Ал кемшіліктеріне келер болсақ, есептеу күрделілігі кубтық полиномдарға қарағанда сәл жоғары. Егер аралық нүктелер көп болса, әрбір сегмент үшін жаңа полином құру керек, бұл есептеу жүктемесін арттыруы мүмкін. Келесі бөлімдерде осы полиномдық әдістерді қолдана отырып, роботтың барлық буындары үшін траекторияны қалай синхронды түрде жоспарлауға болатынын қарастырамыз (PTP және LIN режимдері).

3.5. РТР нүктеден нүктеге траекторияны жоспарлау әдісі

Алдыңғы бөлімдерде роботтың бір буыны үшін тегіс траекторияны қалай құру керектігін қарастырдық. Енді осы тәсілдерді роботтың барлық буындарына бір мезгілде қолданып, оны бір конфигурациядан екіншісіне қалай көшіруге болатыны талданады. Осының ең кең таралған әдісі – РТР (Point-to-Point) траекторияны жоспарлау.

РТР – бұл буын кеңістігінде орындалатын траекторияны жоспарлау әдісі. Оның негізгі мақсаты – роботты бастапқы буындық конфигурациядан

$$q_{initial} = [q_1, q_2, \dots, q_n]$$

соңғы конфигурацияға

$$q_{final} = [q'_1, q'_2, \dots, q'_n]^T$$

жеткізу. Бұл кезде роботтың соңғы атқарушы органының кеңістіктегі нақты жолы маңызды емес.

Бұл әдіс әдетте қай жерде қолданылады соған тоқталсақ. Бірінші Pick-and-place операциялары. Бөлшекті бір жерден алып, екінші жерге қою. Арадағы жол маңызды емес кезінде. Екінші бастапқы позицияға оралу кезінде. Үшінші жылдам орын ауыстыру кезінде. Кедергілер жоқ кеңістікте бір жұмыс аймағынан екіншісіне жылдам өту үшін. Ал артықшылығы бұл әдіс есептеу тұрғысынан өте жылдам, кері кинематиканы қажет етпейді және сингулярлық конфигурациялармен тікелей жұмыс істемейді. Бірақ негізгі мәселе бұл синхронизация. Егер әрбір буын үшін траектория бірдей T уақыт аралығына жоспарланса, қандай мәселе туындайды? Барлық буындар қозғалысты бір уақытта бастап, бір уақытта аяқтайды. Бірақ мәселе мынада кейбір буындар үлкен бұрышқа бұрылуы керек, ал басқалары өте кішкентай бұрышқа бұрылады. Егер уақыт бірдей болса, үлкен бұрышқа бұрылатын буын өте жоғары жылдамдықпен және үдеумен қозғалуға мәжбүр болады. Бұл жылдамдық немесе үдеу мотордың максималды мүмкіндігінен асып кетуі мүмкін, бұл қателікке немесе тіпті мотордың істен шығуына әкеледі. Ендігі мақсат бұл барлық буындар қозғалысты бір уақытта бастап, бір уақытта аяқтауын, бірақ ешбір буынның жылдамдық немесе үдеу шектеулерінен асып кетпеуін қамтамасыз ету. Осының шешімі жетекші буын (Master Joint) арқылы синхрондау. Бұл мәселені шешудің стандартты әдісі – барлық буындардың ішіндегі ең «баяуын» тауып, қалғандарын соған бейімдеу. Бұл процесс бірнеше қадамнан тұрады. Бірінші қадам бұл әрбір буын үшін минималды уақытты есептеу. Алдымен, әрбір буынның i өз қозғалысын

$$\Delta q_i = |q_{final_i} - q_{initial_i}| \quad (3.22)$$

орындау үшін қанша минималды уақыт T_i қажет екенін анықтаймыз. Бұл уақыт сол буынның максималды рұқсат етілген жылдамдығы v_{max_i} мен үдеуіне a_{max_i} негізделеді.

Практикада жиі қолданылатын трапеция тәрізді жылдамдық профилін қарастырайық. Бұл профилде қозғалыс үш фазадан тұрады: тұрақты үдеу, тұрақты жылдамдық және тұрақты тежелу. Үдеу уақыты t_{accel_i} бұл жылдамдықты 0-ден v_{max_i} -ге дейін жеткізуге кететін уақыт:

$$t_{accel_i} = \frac{v_{max_i}}{a_{max_i}} \quad (3.23)$$

Егер осы үдеу және тежелу фазаларында жүріп өтетін жол жалпы жолдан аз болса, онда тұрақты жылдамдық фазасы болады. Әйтпесе, жылдамдық v_{max_i} -ге жетіп үлгермейді, және профиль үшбұрыш тәрізді болады. Минималды уақыт T_i -дің формуласы қозғалыс профилінің түріне байланысты анықталады. Егер үшбұрышты профиль болса:

$$T_i = 2 \sqrt{\frac{\Delta q_i}{a_{max_i}}} \quad (3.24)$$

Егер трапеция тәрізді профиль болса:

$$T_i = \frac{\Delta q_i}{v_{max_i}} + \frac{v_{max_i}}{a_{max_i}} \quad (3.25)$$

Енді барлық буындар синхронды қозғалуы үшін, жалпы қозғалыс уақыты T_{total} ең ұзақ уақытты қажет ететін буынның уақытына тең болуы керек.

$$T_{total} = \max(T_1, T_2, \dots, T_n) \quad (3.26)$$

Осы T_{total} уақытын анықтайтын буын «Жетекші буын» деп аталады. Ол осы қозғалыстағы «ең баяу» буын болып табылады.

Енді бізде барлық буындар үшін ортақ T_{total} уақыты бар. Осы уақытты пайдаланып, әрбір i -ші буын траекториясын алдыңғы бөлімдерде қарастырылған ең тегіс қозғалыс үшін бесінші дәрежелі полиноммен жоспарлаймыз.

$$q_i(t) = QuinticPolynomial(q_{initial_i}, q_{final_i}, v_0, v_1, a_0, a_1, T_{total}) \quad (3.27)$$

Нәтижесінде, «жетекші буын» өзінің максималды мүмкіндіктеріне жақын жылдамдықпен және үдеумен қозғалады, ал қалған «күл буындар» (slave joints) өздерінің максималды мүмкіндіктерінен төмен жылдамдықпен қозғалады, себебі оларға өз қозғалысын аяқтауға артық уақыт берілді. Ең бастысы, барлығы қозғалысты бірге бастап, бірге аяқтайды.

Екі еркіндік дәрежесі бар роботқа мысал келтірейік. Робот келесі позициялар арасында жылжыту керек деп есептейік:

$$q_{initial} = [0^0, 0^0]$$

$$q_{final} = [90^0, 30^0]$$

Жетектердің шектеулерін келесідей деп алайық:

$$1\text{-буын: } v_{max_1} = 50^\circ/\text{с}, a_{max_1} = 100^\circ/\text{с}^2$$

$$2\text{-буын: } v_{max_2} = 30^\circ/\text{с}, a_{max_2} = 50^\circ/\text{с}^2$$

Бірінші минималды уақытты есептеу керек. Олар келесіндей болады:

$$\bullet 1\text{-буын: } \Delta q_1 = 90^\circ. T_1 = 2.3 \text{ секунд.}$$

$$\bullet 2\text{-буын: } \Delta q_2 = 30^\circ. T_2 = 1.6 \text{ секунд.}$$

Одан кейін осы екеуінің арасынан жетекші уақыт анықталады:

$T_{total} = \max(2.3, 1.6) = 2.3$ секунд. Жетекші буын көрініп тұрғандай бірінші буын.

Содан кейін траекторияны жоспарлау керек. Енді екі буынның да траекториясын $T_{total} = 2.3$ секунд уақытына бесінші дәрежелі полином арқылы жоспарлаймыз.

$$q_1(t): q_0=0, q_1=90, T=2.3$$

$$q_2(t): q_0=0, q_1=30, T=2.3$$

Нәтижесінде бірінші буын өзінің максималды жылдамдығына жақын жылдамдықпен қозғалады, ал екінші буын әлдеқайда баяу қозғалады, бірақ екеуі де қозғалысты дәл 2.3 секундта аяқтайды.

Енді қорытындылай кетсек, РТР бұл буын кеңістігінде жылдам және есептеу тұрғысынан тиімді қозғалысты жүзеге асырудың негізгі әдісі. Ол әрбір буынның физикалық шектеулерін ескере отырып, барлық буындардың синхронды қозғалысын қамтамасыз етеді. Алайда, бұл әдіс роботтың соңғы атқарушы органының кеңістіктегі жолын басқармайды. Егер бізге роботтың соңғы атқарушы органын, мысалы, түзу сызық бойымен жылжыту қажет болса, онда келесі бөлімде қарастырылатын LIN (сызықтық) траекторияны жоспарлау әдісін қолдануымыз керек.

3.6. LIN – сызықтық траекторияны жоспарлау

РТР әдісі роботты бір нүктеден екінші нүктеге жылдам жеткізу үшін тиімді болғанымен, ол роботтың соңғы атқарушы органының нақты жолын басқармайды. Көптеген өнеркәсіптік және медициналық қолданбаларда роботтың соңғы атқарушы органының белгілі бір геометриялық жолмен, мысалы, түзу сызық бойымен қозғалуы өте маңызды. Дәл осы мәселені шешу үшін LIN сызықтық траекторияны жоспарлау әдісі қолданылады.

LIN – бұл Декарттық кеңістікте орындалатын траекторияны жоспарлау әдісі. Оның негізгі мақсаты – роботтың соңғы атқарушы органын бастапқы Декарттық орны мен бағдары p_{start} соңғы орны мен бағдарына p_{end} дейін түзу сызық бойымен жылжыту. Сонымен қатар, роботтың бағдары да бастапқы бағдардан соңғы бағдарға тегіс өзгереді. Осы әдіс келесі салаларда кеңінен қолданылады. Олар дәнекерлеуде, желімдеуде, кесуде және өлшеуде, яғни

дәнекерлеу жігін түзу сызық бойымен жүргізу, бөлшектердің шетіне түзу сызықпен желім жағу, лазермен, плазмамен немесе сумен материалдарды түзу сызықпен кесу, объектінің бетін сканерлеу немесе өлшеу үшін сенсорды түзу сызықпен жылжыту.

LIN траекториясын құру РТР-ға қарағанда күрделірек, себебі ол әрбір уақыт мезетінде кері кинематиканы есептеуді қажет етеді. Процесс келесі қадамдардан тұрады:

Бірінші қадам бұл жолды дискреттеу. Алдымен, Декарттық кеңістіктегі түзу сызықты көптеген кішкентай нүктелерге бөлеміз. Егер жалпы қозғалыс уақыты T болса, оны N сегментке бөлеміз, әрқайсысының ұзақтығы $\Delta t = T/N$. Әрбір k -шы уақыт мезетінде $t_k = k\Delta t$ роботтың соңғы атқарушы органының қажетті позасын $p(t_k)$ анықтаймыз. Қосымша түсінікті болу үшін $p(t) = \text{position}(t)$.

Екінші қадам бұл позицияны интерполяциялау. Соңғы нүктенің позициясын (x, y, z) интерполяциялау өте оңай. Бұл кәдімгі сызықтық интерполяция:

$$p(t) = p_{start} + (p_{end} - p_{start}) \frac{t}{T} \quad (3.28)$$

Мұнда t уақыт 0-ден T -ға дейін өзгереді.

Үшінші қадам бұл бағдарды интерполяциялау

Бағдарды интерполяциялау күрделірек. Эйлер бұрыштарын тікелей интерполяциялау Гимбал құлыпталуы (Gimbal Lock) сияқты мәселелерге және интуитивті емес айналуларға әкелуі мүмкін. Сондықтан, кең таралған және неғұрлым дұрыс тәсіл – Кватерниондарды және Сфералық Сызықтық Интерполяцияны (SLERP) қолдану. Кватернион – бұл 3D кеңістіктегі айнаруды немесе бағдарды сипаттайтын төрт өлшемді сан $q = [w, x, y, z]$. Олардың Эйлер бұрыштарына қарағанда бірнеше маңызды артықшылығы бар: олар Гимбал құлыпталуына ұшырамайды және екі бағдар арасындағы ең қысқа және ең тегіс айналу жолын таба алады.

SLERP процесі:

Бірінші жасалу керек әрекет бастапқы O_{start} және соңғы O_{end} бағдарларын айналу матрицаларынан кватерниондарға q_{start} және q_{end} түрлендіреміз. Одан кейін екі кватернион арасындағы «бұрышты» Ω скаляр көбейтінді арқылы табамыз:

$$\cos\Omega = q_{start} * q_{end} \quad (3.29)$$

Келесі кез келген t уақытындағы аралық кватернионды $q(t)$ SLERP формуласымен есептейміз:

$$q_{ori}(t) = \frac{\sin((1-s)\Omega)}{\sin\Omega} q_{start} + \frac{\sin s\Omega}{\sin\Omega} q_{end} \quad (3.30)$$

Мұндағы $s = t / T$ – нормаланған уақыт. Бұл формула q_{start} -тан q_{end} -ке дейін сфераның бетіндегі ең қысқа жолмен «жүріп» өтеді.

Келесі төртінші қадам кері кинематиканы есептеу. Енді бізде әрбір t_k уақыт мезетіне сәйкес келетін толық Декарттық $p(t_k)$, $q_{ori}(t_k)$ бар. LIN траекториясының ең маңызды және есептеу тұрғысынан ауыр қадамы осында басталады: әрбір $p(t_k)$ және $q_{ori}(t_k)$ позасына сәйкес келетін буын бұрыштарын $\theta(t_k)$ табу.

Бұл есептеуді роботтың контроллері нақты уақыт режимінде, әдетте әрбір 1-10 миллисекунд сайын орындап отыруы керек.

Бесінші қадам бұл буын жылдамдықтарын тексеру. Кері кинематикадан алынған буын бұрыштарының $q_i(t_k)$ тізбегі енді біздің буын кеңістігіндегі траекториямыз болып табылады. Осы траекторияны орындау үшін қажетті буын жылдамдықтары мен үдеулерін тексеру керек. Егер кез келген буынның жылдамдығы $(q_i(t_k) - q_i(t_{k-1})) / \Delta t$ оның максималды мүмкіндігінен асып кетсе, онда жалпы қозғалыс уақытын T арттыру керек немесе траекторияны қайта жоспарлау қажет.

Енді мысал келтірейік:

Тапсырма келесідей болсын: робот қолы p_{start} нүктесінен p_{end} нүктесіне дейін $T=2$ секунд ішінде түзу сызықпен және бағдарын өзгертпей жылжытуы керек.

Бірінші қадам бұл тапсырманы Декарттық кеңістікте анықтау керек. Алдымен, бастапқы және соңғы нүктелердің координаталарын және бағдарын анықтаймыз. Позиция миллиметрмен, ал бағдар Эйлер бұрыштарымен берілсін.

$$p_{start} = \begin{bmatrix} 300 \\ 100 \\ 400 \end{bmatrix}$$

$$O_{start} = \begin{bmatrix} \alpha = 180 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 90 \end{bmatrix}$$

$$p_{end} = \begin{bmatrix} 300 \\ 500 \\ 400 \end{bmatrix}$$

$$O_{end} = \begin{bmatrix} \alpha = 180 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 90 \end{bmatrix}$$

бағдар өзгермейді.

$$T = 2 \text{ c}$$

Екінші қадам бұл жолды дискретизациялау, яғни нүктелерге бөлу. Роботтың басқару контроллері белгілі бір жиілікпен жұмыс істейді, мысалы, әрбір 4 миллисекунд сайын, яғни 250 Гц. Бұл «интерполяция циклі» деп

аталады. Түзу сызықты осы циклге сәйкес келетін көптеген кішкентай нүктелерге бөлуіміз керек. Интерполяция циклі

$$\Delta t = 0.004$$

секунд, сонда жалпы қадамдар саны:

$$N = \frac{T}{\Delta t} = \frac{2}{0.004} = 500$$

қадам. Демек, траектория $N = 500$ уақыт аралығына және $N + 1 = 501$ есептеу нүктесіне бөлінеді ($i = 0, 1, \dots, 500$).

Үшінші қадам әрбір нүкте үшін позицияны интерполяциялау. i -ші қадамдағы позицияны анықтау үшін сызықтық интерполяция қолданылады. Нормаланған уақыт:

$$s = \frac{i}{N}, 0 \leq i \leq 500 \quad (3.31)$$

Сонда координаталар:

$$\begin{aligned} x(i) &= x_{start} + s(x_{end} - x_{start}) = 300 + s(300 - 300) = 300 \\ y(i) &= y_{start} + s(y_{end} - y_{start}) = 100 + s(500 - 100) = 100 + 400s \\ z(i) &= z_{start} + s(z_{end} - z_{start}) = 400 + s(400 - 400) = 400 \end{aligned}$$

Мысалы, траекторияның ортасында $i = 250$, $s = 0.5$ болғанда:

$$p(250) = \begin{bmatrix} 300 \\ 100 + 400 \cdot 0.5 \\ 400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 300 \\ 400 \end{bmatrix}$$

Төртінші қадам әрбір нүкте үшін бағдарды интерполяциялау. Бұл үшін кватерниондар және SLERP деп аталатын әдісті қолданамыз. Кватернионға түрлендіру үшін алдымен, бастапқы және соңғы Эйлер бұрыштарын кватерниондарға q_{start} және q_{end} айналдырамыз.

Бағдардың басы мен

$$\begin{aligned} O_{start} &\rightarrow q_{start}^{ori} \\ O_{end} &\rightarrow q_{end}^{ori} \end{aligned}$$

Біздің мысалда бағдар өзгермейтіндіктен, $q_{start} = q_{end}$ SLERP формуласы i -ші қадамдағы аралық бағдар $q(i)$ келесі формуламен есептеледі:

$$q(i) = \text{SLERP}(q_{start}^{ori}, q_{end}^{ori}, s) \quad (3.32)$$

SLERP формуласы екі бағдардың арасындағы ең қысқа және ең тегіс жолды табады. Осы мысалда, $q_{start}^{ori} = q_{end}^{ori}$ болғандықтан, $q(i)$ барлық қадамдарда бірдей болады.

Бесінші қадам кері кинематиканы есептеу бұл ең маңызды қадам болып саналады. Енді әрбір i -ші қадам үшін соңғы атқарушы органның толық декарттық орны мен бағдары белгілі болады. Осы қадамда әрбір $p(i)$ үшін кері кинематика функциясын шақырамыз:

$$[\theta_1(i), \theta_2(i), \dots, \theta_6(i)] = IK(p(i), q_{ori}(i)) \quad (3.33)$$

Бұл есептеуді контроллер әрбір 4 миллисекунд сайын қайталап отырады. Мысалы:

$$\begin{aligned} i = 0: \theta(0) &= IK(p_{start}) \\ i = 1: \theta(1) &= IK(p_1) \\ &\dots \\ i = 500: \theta(500) &= IK(p_{end}) \end{aligned}$$

Нәтижесінде 501 нүктеден тұратын буын бұрыштарының тізбегін аламыз. Бұл – біздің буын кеңістігіндегі траекториямыз. Контроллер осы тізбекті орындау арқылы роботты басқарады.

Енді осы жазылғандардың дұрыстығын тексеруге тоқталсақ. Траекторияны орындамас бұрын, оның дұрыстығын және қауіпсіздігін тексеру өте маңызды. Кері кинематикадан алынған буын бұрыштарының тізбегі $\theta(i)$ бізге позицияны ғана береді. Осыдан жылдамдық пен үдеуді есептеп, олардың роботтың физикалық шектеулерінен аспайтынын тексеруіміз керек. Енді жылдамдық пен үдеуді келесі формулалармен тапсақ болады:

$$\dot{\theta}_1(i) \approx \frac{\theta_1(i) - \theta_1(i-1)}{\Delta t} \quad (3.34)$$

$$\ddot{\theta}_1(i) \approx \frac{\dot{\theta}_1(i) - \dot{\theta}_1(i-1)}{\Delta t} \quad (3.35)$$

Егер есептелген жылдамдық немесе үдеу кез келген буын үшін максималды мәннен асып кетсе, бұл траектория физикалық тұрғыдан мүмкін емес дегенді білдіреді. Мұндай жағдайда ең қарапайым шешім – жалпы қозғалыс уақытын T арттыру. Уақыт артқан сайын, қажетті жылдамдықтар азаяды.

Тағы бір маңызды мәселе – сингулярлық мәселесі. Бұл LIN траекториясын жоспарлаудағы ең қауіпті және күрделі мәселесі. Сингулярлық – бұл робот қолдың белгілі бір конфигурациясы, онда ол бір немесе бірнеше бағытта қозғалу еркіндігінен айырылады. Егер робот қолдың жолы сингулярлық нүктеге жақын немесе дәл үстінен өтсе, кері кинематика теңдеуінің шешімі болмай қалады немесе кейбір буындардың шексіз үлкен жылдамдықпен айналуын талап етеді. Бұл робот қолдың тоқтап қалуына, қатты

дірілдеуіне немесе тіпті сынуына әкелуі мүмкін. Осы мәселені шешу үшін робот қолдың контроллерлері арқылы сингулярлыққа жақындағанда қозғалысты баяулатып немесе тоқтатады немесе сингулярлық конфигурацияны айналып өту үшін жолдан сәл ауытқытады.

Кесте 5 – PTP және LIN траекторияны жоспарлау әдістерін салыстыру

Сипаттамасы	PTP нүктеден нүктеге	LIN сызықтық
Жоспарлау кеңістігі	Буын кеңістігі	Декарттық кеңістік
Соңғы атқарушы органның жолы	Болжауға қиын, әдетте қисық	Түзу сызық
Негізгі мақсаты	Жылдам орын ауыстыру	Жолдың дәлдігі
Есептеу жүктемесі	Төмен	Жоғары кері кинематика себебінен
Сингулярлық мәселесі	Айқын емес	Бар, өте маңызды мәселе

Келесі бөлімде осы классикалық әдістерден ерекшеленетін, әсіресе адаммен өзара әрекеттесуге арналған адаптивті траекторияны жоспарлау әдісін қарастырамыз.

3.7. Реабилитацияға арналған адаптивті траекторияны жоспарлау әдісі.

Алдыңғы бес әдіс сызықтық, кубтық, бесінші дәрежелі, PTP және LIN алдын-ала анықталған, өзгермейтін траекторияларды құруға бағытталған. Робот бұл траекторияны қоршаған ортадағы өзгерістерге немесе сыртқы күштерге қарамастан, мүмкіндігінше дәл орындауға тырысады. Бұл өнеркәсіптік қолданбалар үшін өте маңызды.

Алайда, адаммен тікелей өзара әрекеттесу қажет болатын салаларда, әсіресе физикалық реабилитацияда, бұл тәсіл тиімсіз, тіпті қауіпті болуы мүмкін. Науқаспен жұмыс істейтін робот бір ғана алдын ала берілген тапсырманы істейтін болмауы керек, керісінше, ол адамның қозғалысына бейімделіп, қажет кезде тоқтап немесе қозғалтқыштардың күшін азайтып, қажет кезде көмектесуі тиіс. Дәл осы мақсатта адаптивті траекторияны жоспарлау әдісі қолданылады.

Классикалық әдістер реабилитацияға жарамсыз екенін бірнеше себеппен түсіндіруге болады. Мысалы, робот инсульттен кейін қол функциясын қалпына келтіріп жатқан науқаспен жұмыс істеген жағдайда, классикалық тәсілде робот қолдың мақсаты — науқастың қолын алдын ала анықталған траектория бойымен жүргізу болады. Осы жағдайда егер науқас роботтан жылдамырақ қозғалса, классикалық робот мұны қате деп санап, науқасты тежеуге тырысады. Бұл науқастың өз күшімен жаттығу жасауына кедергі келтіреді. Егер науқас роботтан баяу қозғалса немесе шаршаса: Робот бәрібір өз траекториясын орындауға тырысып, науқастың қолын күшпен тартады. Бұл жарақатқа әкелуі

мүмкін. Және де егер науқаста спазм болып, кенеттен қарсылық көрсетсе, робот мұны үлкен қателік деп қабылдап, оны жеңу үшін моторының күшін арттырады. Бұл өте қауіпті жағдай. Қорытындылай кетсек реабилитациялық робот позицияны емес, күшті және өзара әрекеттесуді басқаруы керек.

Адаптивті траекторияның негізінде Импеданстық басқару (Impedance Control) концепциясы жатыр. Идея өте қарапайым ол робот қолы өзін қатты, алдын ала берілген тапсырманы ғана орындаймын дейтін құрылғы ретінде емес, белгілі бір механикалық қасиеттері бар виртуалды серіппе-демпфер жүйесі ретінде қарастырылады.

Механикалық импеданс – бұл жүйенің қозғалысқа қаншалықты қарсылық көрсететінін сипаттайтын шама. Ол үш компоненттен тұрады: инерция, демпферлеу және қаттылық (серпімділік).

Импеданстық басқаруда робот қолдың соңғы атқарушы органы мен қоршаған орта, мысалы науқастың қолы арасындағы байланысты келесі теңдеумен сипаттаймыз:

$$F_{ext} = M(\ddot{x}_d - \ddot{x}) + D(\dot{x}_d - \dot{x}) + K(x_d - x) \quad (3.36)$$

Мұндағы:

F_{ext} – роботқа әсер ететін сыртқы күш, яғни науқас әсер ететін күш, ал x_d , $\dot{x}_d$, $\ddot{x}_d$ – робот қолының қалаулы (desired) виртуалды траекториясының позициясы, жылдамдығы және үдеуі x , $\dot{x}$, $\ddot{x}$ – робот қолдың нақты (actual) позициясы, жылдамдығы және үдеуі, ал M , D , K – басқаратын виртуалды масса, демпферлеу және қаттылық параметрлері.

Яғни, робот қолдың міндеті – x_d траекториясын «соқыр» түрде орындау емес, F_{ext} сыртқы күшіне жауап ретінде өзінің нақты x позициясын өзгертіп, жоғарыдағы теңдеуді қанағаттандыру.

Адаптивті траекторияны жоспарлау келесідей жүзеге асырылады. Бірінші номиналды траектория x_d алдымен, классикалық бесінші дәрежелі полиноммен идеалды, тегіс номиналды траекторияны $x_d(t)$ құрылады. Бұл – робот қолының науқастан ешқандай сыртқы күштер салмағанда жүріп өтетін жолы. Робот қолының соңғы атқарушы органына орнатылған күш пен момент сенсоры науқастың әсер ететін F_{ext} күшін үздіксіз өлшеп отырады. Одан кейін робот қолдың басқару жүйесі F_{ext} күшін импеданс теңдеуіне қойып, номиналды траекториядан қажетті ауытқуды есептейді.

$$x_d - x = K^{-1}[F_{ext} - M(\ddot{x}_d - \ddot{x}) - D(\dot{x}_d - \dot{x})] \quad (3.37)$$

Қарапайым тілмен айтқанда, егер науқас роботқа көмектессе, яғни F_{ext} қозғалыс бағытында болса робот номиналды траекториядан озып кетеді. Бұл «Assist-as-Needed» (Қажет кезде көмектесу) принципінің негізі. Ал егер науқас роботқа қарсылық көрсетсе, яғни F_{ext} қозғалысқа қарсы болса, робот қолы қарсыласпай номиналды траекториядан артта қалады. Ауытқу мөлшері виртуалды қаттылыққа K тәуелді. K неғұрлым аз болса, робот соғұрлым

«жұмсақ» болып, оңай қарсыласпай жол береді. Нәтижесінде, роботтың нақты жүріп өткен траекториясы $x(t)$ алдын-ала анықталған емес, ол номиналды траектория мен науқастың күші арасындағы динамикалық тепе-теңдіктің нәтижесі болып табылады.

Импеданстық басқарудың ең үлкен артықшылығы – оның икемділігі. Терапевт науқастың жағдайына байланысты K (қаттылық) және D (демпферлеу) параметрлерін өзгерте алады. Реабилитацияның басы науқас әлсіз кезде, K мәнін төмен қоюға болады. Бұл кезде робот өте «жұмсақ» болып, науқасқа көбірек көмектеседі. Ал науқас күшейген кезде K мәнін арттыруға болады. Робот «қаттырақ» болып, көбірек қарсылық көрсетеді, бұл науқасты өз күшімен көбірек жұмыс істеуге ынталандырады. Демпферлеу D болса бұл параметр қозғалыстың тегістігін реттейді. D жоғары болса, қозғалыс баяу және тұрақты болады, дірілді басады. D төмен болса, қозғалыс «жеңілiрек» болады.

Қорытындылай кетсек, адаптивті траекторияны жоспарлау – бұл алдын-ала анықталған жолды орындаудан гөрі, робот пен адам арасындағы динамикалық және қауіпсіз өзара әрекеттесуді қамтамасыз етуге бағытталған заманауи тәсіл. Ол роботты жай ғана машинадан науқастың қажеттіліктеріне сезімтал жауап бере алатын «ақылды» ассистентке айналдырады. Бұл әдіс реабилитациялық робототехниканың негізгі негізгі бағыттарының бірі болып саналады. Төмендегі кестеде алты әдістің негізгі сипаттамалары жинақталған.

Кесте 6 – Траекторияны жоспарлаудың алты әдісін салыстыру

Критерий	Сызықтық	Кубтық	Бесінші дәрежелі	РТР нүктеде н нүктеге	LIN сызықтық	Адаптивті
Жоспарлау кеңістігі	Буын мен Декарттық	Буын мен Декарттық	Буын мен Декарттық	Буын	Декарттық	Декарттық
Жолдың формасы	Түзу	Полином	Полином	Болжауға қиын	Түзу сызық	Динамикалық, өзгермелі
Тегістік (smoothness)	C^0 позиция	C^1 жылдамдық	C^2 үдеу	C^2 бесінші дәрежелі полином мен	C^2 бесінші дәрежелі полином мен	C^2
Есептеу күрделілігі	Өте төмен	Төмен	Орташа	Төмен	Өте жоғары	Жоғары
Негізгі	Қарапайым	Жылдамд	Максим	Жылдам	Жолдың	Қауіпсіз

артықшылығы	дылық	ықтың тегістігі	алды тегістік	дык, сингулярлық жоқ	дәлдігі	өзара әрекеттесу
Негізгі кемшілігі	Діріл (jerk)	Үдеудің үзілісі	Есептеу күрделілігі	Жолды басқармау	Сингулярлық, есептеу жүгі	Күрделі басқару
Негізгі қолданбасы	Дөрекі қозғалыс	Жалпы мақсат	Жоғары жылдамдық пен дәлдік	Pick-and-place	Дәнекерлеу, кесу	Реабилитация

Енді осы жоғарыда айтылған алты әдістерді қысқа қорытындыласақ. Егер бізге тек бір нүктеден екінші нүктеге жету керек болса және арадағы жол маңызды емес болса онда РТР нүктеден нүктеге әдісін таңдаймыз. Себебі, бұл ең жылдам және есептеу тұрғысынан ең тиімді әдіс. Ол роботтың барлық буындарының шектеулерін ескере отырып, оңтайлы қозғалысты қамтамасыз етеді. Ішкі траекторияны құру үшін бесінші дәрежелі полиномды қолданған жөн, бұл дірілсіз, тегіс қозғалысты қамтамасыз етеді.

Егер бізге роботтың соңғы атқарушы органын түзу сызық бойымен жылжыту керек болса, LIN сызықтық әдісін таңдаймыз. Себебі, бұл әдіс Декарттық кеңістікте жолдың дәлдігін қамтамасыз ететін жалғыз әдіс. Аралық нүктелердің траекториясын тегіс ету үшін бесінші дәрежелі полиномға негізделген қозғалыс профилін қолданған дұрыс. Бірақ ескере кететін жайт сингулярлық конфигурациялардан аулақ болуды мұқият жоспарлау керек.

Егер робот қол адаммен тікелей физикалық байланыста жұмыс істегені үшін бізге адаптивті траектория жоспарлау әдісі керек. Себебі, қауіпсіздік бірінші орында. Бұл әдіс роботқа сыртқы күштерге «жол беруге» мүмкіндік береді, бұл оны адам үшін қауіпсіз және жайлы етеді. Робот алдын-ала белгіленген жолды «соқыр» түрде орындамайды, керісінше, адамның әрекетіне бейімделеді.

Реабилитацияға арналған роботтық жүйелерде басқару алгоритмі тек берілген траекторияны орындап қана қоймай, пациенттің физиологиялық күйіне және нақты уақыттағы ниетіне бейімделуі тиіс. Осы тұрғыдан алғанда, биосигналдарға негізделген adaptive control тәсілдері реабилитациялық құрылғылардың тиімділігін арттыратын маңызды бағыт ретінде қарастырылады [57].

Осы диссертацияда қарастырылған екі негізгі қолданба үшін келесі әдістері таңдалды және ұсынылады.

Бірінші қашықтықтан басқарылатын робот гид. Бұл тапсырмада роботтың негізгі міндеті – адамдарға жол көрсету, объектілерді нұсқау. Мұнда жолдың дәлдігі және қозғалыстың тегістігі маңызды. Негізінен РТР бір экспонаттан екіншісіне жылдам өту үшін және LIN объектіні сызып көрсету немесе белгілі

бір бағытты нұсқау үшін осы екі әдістің комбинациясы қолданылады және барлық қозғалыстар бесінші дәрежелі полиномдармен жоспарланады.

Екінші insultтен кейінгі реабилитацияда қауіпсіздік пен интерактивті өзара әрекеттесу бірінші орында. Сондықтан негізгі тәсіл ретінде импеданстық басқаруға негізделген адаптивті траекторияны жоспарлау әдісін қолдану ұсынылады. Ал номиналды траекторияны қалыптастыру үшін бесінші дәрежелі полиномдарды пайдалану тиімді. Мұндай тәсіл науқастың жағдайына бейімделетін, қауіпсіз және тиімді терапиялық қозғалысты қамтамасыз етеді.

4. Робот қолының басқару жүйелері

Осы диссертацияда екі мақсатты, яғни реабилитация мен қашықтықтан басқаруға арналған робот қолы үшін екі басқару әдісі қарастырылды:

Біріншісі есептелген моментті басқару әдісі (Computed Torque Control). Бұл — робот қолының күрделі динамикасын сызықтандыру арқылы берілген траекторияны өте жоғары дәлдікпен қадағалауды қамтамасыз етеді. Бұл әдіс роботтың бос кеңістіктегі қозғалысы үшін өте маңызды.

Екіншісі импеданстық басқару (Impedance Control). Ал бұл — робот пен науқас арасындағы физикалық өзара әрекеттесу кезінде қауіпсіздікті қамтамасыз етеді. Бұл әдіс роботты "жұмсақ" етіп, пациенттің күшіне немесе кедергілерге бейімделуге мүмкіндік береді.

4.1. Есептелген моментті басқару әдісі

Екі мақсатты алты еркіндік дәрежелі гуманоид робот қолының басқару жүйесін жобалауда ең маңызды қадамдардың бірі — берілген траекторияны дәл қадағалауды қамтамасыз ету. Осы мақсатта кеңінен қолданылатын және жоғары тиімділік көрсететін алгоритмдердің бірі — есептелген моментті басқару әдісі болып табылады. Робототехникада манипуляторлардың динамикасы өте күрделі, бейсызық және өзара байланысқан жүйе болып табылады. Бір буынның қозғалысы басқа буындарға инерциялық, центрден тепкіш және Кориолис күштері арқылы әсер етеді. Қарапайым пропорционалды-дифференциалды немесе пропорционалды-интегралды-дифференциалды реттегіштер мұндай күрделі жүйелерді жоғары жылдамдықта және жоғары дәлдікпен басқаруға қауқарсыз болуы мүмкін, өйткені олар жүйенің бейсызықтығын ескермейді.

Есептелген моментті басқару әдісінің негізгі идеясы — роботтың динамикалық моделін пайдалана отырып, жүйенің бейсызық элементтерін компенсациялау және оны сызықтық, бір-біріне тәуелсіз ішкі жүйелерге айналдыру. Бұл тәсіл басқару теориясында кері байланыс арқылы сызықтандыру немесе кері динамикалық басқару деп те аталады. Физикалық тұрғыдан алғанда, контроллер роботтың ағымдағы жағдайы мен жылдамдығын өлшейді, содан кейін гравитация әсерін өтеуге, инерциялық әсерлерді ескеруге және басқа да кедергі күштерді өтеуге қажетті механикалық моментті есептейді. Егер робот қолының динамикалық моделі дәл белгілі болса, есептелген моментті басқару роботты сызықтық жүйе ретінде әрекет етуге мәжбүрлейді. Содан кейін осы "сызықтандырылған" жүйені басқару үшін стандартты сызықтық басқару әдістері, яғни PD немесе PID қолданылады.

Енді осы әдістің негізгі артықшылықтарына тоқталсақ. Біріншіден дәлдігі жоғары. Себебі, траекторияны қадағалау кезінде қателіктер нөлге ұмтылады. Екіншіден әрбір буынды басқару басқа буындардың қозғалысына тәуелсіз болады. Үшіншіден сызықтық жүйелер теориясын қолдана отырып, тұрақтылықты дәлелдеу оңай. Алайда, бұл әдістің кемшіліктері де бар. Олар басқару сапасы роботтың динамикалық моделінің дәлдігіне тікелей байланысты. Масса, инерция немесе үйкеліс параметрлеріндегі қателіктер

басқару сапасын төмендетуі мүмкін. Және де көп буынды жүйелер үшін нақты уақыт режимінде кері динамиканы есептеу үлкен есептеу қуатын қажет етеді.

4.1.1. Математикалық модель және басқару заңын құру

Алты еркіндік дәрежелі (6-DOF) робот қолының динамикалық теңдеуі алдыңғы Эйлер-Лагранж әдісі арқылы алынады және біздің мақсатымыз — роботтың нақты траекториясы $q(t)$ берілген қалаулы траекторияны $q_d(t)$ қадағалауын қамтамасыз ететін τ басқару заңын анықтау. Траекторияны қадағалау қателігін $e(t)$ деп белгілесек, сонда:

$$e(t) = q_d(t) - q(t) \quad (4.1)$$

Қателіктің бірінші және екінші туындылары:

$$\dot{e}(t) = \dot{q}_d(t) - \dot{q}(t) \quad (4.2)$$

$$\ddot{e}(t) = \ddot{q}_d(t) - \ddot{q}(t) \quad (4.3)$$

Есептелген моментті басқару әдісінде басқару заңы келесідей таңдалады:

$$\tau = \hat{M}(q)u + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{G}(q) + \hat{F}(\dot{q}) \quad (4.4)$$

Мұндағы $\hat{M}, \hat{C}, \hat{G}, \hat{F}$ — динамикалық модель параметрлерінің бағаланған матрицалары. Егер біздің математикалық моделіміз дәл болса, яғни

$$\hat{M} = M, \hat{C} = C, \hat{G} = G, \hat{F} = F \quad (4.5)$$

болса, онда бұл басқару заңын роботтың динамикалық теңдеуіне қойғанда келесідей нәтиже аламыз:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F(\dot{q}) = M(q)u + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F(\dot{q}) \quad (4.6)$$

Қысқартулардан кейін:

$$M(q)\ddot{q} = M(q)u \quad (4.7)$$

$M(q)$ әрқашан кері матрицасы бар болғандықтан, біз мынадай өте қарапайым сызықтық теңдеуге келеміз:

$$\ddot{q} = u \quad (4.8)$$

Бұл теңдеу бастапқы күрделі, бейсызық робот жүйесінің енді 6 тәуелсіз қос интеграторлық ішкі жүйе жүйесіне айналғанын білдіреді. Енді біз u қосымша басқару сигналын сызықтық басқару теориясы арқылы оңай жобалай

аламыз. Әдетте u үшін пропорционалды-дифференциалды кері байланыс қолданылады:

$$u = \ddot{q}_d + K_v \dot{e} + K_p e \quad (4.9)$$

Мұндағы $\ddot{q}_d$ — қалаулы үдеу, K_p — пропорционалдық күшейту коэффициенттерінің диагональды матрицасы және K_v — дифференциалдық күшейту коэффициенттерінің диагональды матрицасы, яғни бәсеңдеткіш. Осы u мәнін 4.8 теңдеуіне қойсақ:

$$\ddot{q} = \ddot{q}_d + K_v \dot{e} + K_p e \quad (4.10)$$

Бұдан 4.3 теңдеуді ескерсек, тұйықталған жүйенің қателік динамикасының теңдеуін аламыз:

$$\ddot{e} + K_v \dot{e} + K_p e = 0 \quad (4.11)$$

Бұл — екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу. Егер K_p және K_v матрицалары оң анықталған, яғни диагональды элементтері оң сандар болса, онда бұл теңдеудің шешімі уақыт өте келе экспоненциалды түрде нөлге ұмтылады:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (4.12)$$

Бұл роботтың нақты траекториясы қалаулы траекторияға асимптоталық түрде жақындайтынын және оны дәл қадағалайтынын математикалық түрде дәлелдейді. Сонымен, толық есептелген моментті басқару заңы келесідей болады:

$$\tau = M(q)(\ddot{q}_d + K_v \dot{e} + K_p e) + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F(\dot{q}) \quad (4.13)$$

Бұл теңдеудің әрбір бөлігінің өзіндік рөлі бар:

$M(q)\ddot{q}_d$ — инерцияны жеңуге және қалаулы үдеуді қамтамасыз етуге арналған алға байланыс;

$M(q)(K_v \dot{e} + K_p e)$ — траекториядан ауытқуларды түзететін кері байланыс.

$C(q, \dot{q})\dot{q}$ — жылдамдыққа байланысты пайда болатын Кориолис және центрден тепкіш күштерді жою.

$G(q)$ — робот қолының өз салмағын ұстап тұруға қажетті момент.

$F(\dot{q})$ — буындардағы механикалық үйкелісті жеңу.

Практикада параметрлік қателіктер мен модельденбеген үйкеліс әсерлері болғандықтан, қадағалау қатесі нөлге дәл тең болмауы мүмкін.

4.1.2. Гуманоид робот қол үшін есептелген моментті басқару әдісін қолдану

Реабилитация кезінде пациенттің қолы белгілі бір терапевтік траектория бойымен қозғалуы қажет. Бұл траекториялар әдетте жұмыс кеңістігінде, яғни Декарттық координаттарда беріледі:

$$X_d(t) = [x_d \ y_d \ z_d \ \varphi_d \ \theta_d \ \gamma_d]^T \quad (4.14)$$

Басқару жүйесі бұл тапсырманы орындау үшін келесі қадамдарды жасайды. Бірінші, декарттық кеңістіктегі қалаулы траектория $X_d(t)$ буын кеңістігіндегі қалаулы бұрыштарға $q_d(t)$ түрлендіріледі. Бұл түрлендіру кері кинематика әдістері арқылы орындалады. Ал жылдамдық деңгейіндегі байланыс қажет болған жағдайда Якобиан матрицасы $J(q)$ қолданылады. Екінші қалаулы бұрыштардың бірінші және екінші туындылары $\dot{q}_d(t)$ және $\ddot{q}_d(t)$ есептеледі. Бұл мәндер тегіс және үзіліссіз болуы тиіс, сондықтан әдетте 5-ші дәрежелі полиномдар немесе сплайн-интерполяция қолданылады. Үшінші, есептелген $q_d(t)$, $\dot{q}_d(t)$ және $\ddot{q}_d(t)$ мәндері, сондай-ақ датчиктерден алынған нақты $q(t)$ және $\dot{q}(t)$ мәндері есептелген моментті басқару заңына енгізіледі.

Есептелген моментті басқару әдісінің ең үлкен артықшылығы — оның қателіктер динамикасын сызықтық түрге келтіруінде. Егер 4.11 теңдеудегі K_p және K_v матрицалары диагональды түрде таңдалса, онда әрбір буынның қателік динамикасын жеке қарастыруға болады. Бұл жағдайда i -ші буын үшін:

$$\ddot{e}_i + k_{v_i} \dot{e}_i + k_{p_i} e_i = 0 \quad (4.15)$$

Осы теңдеудің сипаттамалық көпмүшесі:

$$s^2 + k_{v_i} s + k_{p_i} = 0 \quad (4.16)$$

Бұл — екінші ретті стандартты механикалық жүйенің масса–серіппе–бәсеңдеткіш теңдеуі. Оның динамикалық қасиеттерін меншікті жиілік ω_{n_i} және өшу коэффициенті ζ_i арқылы сипаттауға болады:

$$s^2 + 2\zeta_i \omega_{n_i} s + \omega_{n_i}^2 = 0 \quad (4.17)$$

Осыдан k_{p_i} және k_{v_i} коэффициенттерін таңдаудың келесі ережелері алынады:

$$k_{v_i} = 2\zeta_i \omega_{n_i} \quad (4.18)$$

$$k_{p_i} = \omega_{n_i}^2 \quad (4.19)$$

Әдетте жүйенің критикалық өшуі талап етіледі, яғни $\zeta_i = 1$. Бұл жағдайда жүйе тербеліссіз ең жылдам түрде тепе-теңдікке келеді. Онда коэффициенттер келесідей болады:

$$k_{v_i} = 2\sqrt{k_{p_i}} \quad (4.20)$$

Матрицалық түрде жазылуы:

$$K_v = \text{diag}(k_{v_1}, k_{v_2}, \dots, k_{v_6}) \quad (4.21)$$

$$K_p = \text{diag}(k_{p_1}, k_{p_2}, \dots, k_{p_6}) \quad (4.22)$$

Нақты әлемде роботтың динамикалық моделін мінсіз дәлдікпен білу мүмкін емес. Жүктің массасы өзгеруі мүмкін. Мысалы, робот пациенттің қолын ұстағанда, үйкеліс коэффициенттері температураға байланысты өзгереді, ал сенсорларда шу болады. Осы белгісіздіктерді ΔM , ΔC , ΔG , ΔF деп белгілейік. Онда басқару заңы келесі түрде жазылады:

$$\tau = \hat{M}(q)(\ddot{q}_d + K_v \dot{e} + K_p e) + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{G}(q) + \hat{F}(\dot{q}) \quad (4.23)$$

мұндағы $\hat{M}$, $\hat{C}$, $\hat{G}$, $\hat{F}$ — модельдің номиналды матрицалары мен векторлары.

Осы басқару заңын нақты динамика теңдеуіне қойғанда, қателік динамикасы ықшам түрде келесі түрде өрнектелуі мүмкін:

$$\ddot{e} + K_v \dot{e} + K_p e = \hat{M}^{-1}(q)\eta(q, \dot{q}, \ddot{q}) \quad (4.24)$$

мұндағы η — модельдегі белгісіздіктер мен сыртқы ауытқулардың жиынтық әсері:

$$\eta = \Delta M \ddot{q} + \Delta C \dot{q} + \Delta G + \Delta F + \tau_d \quad (4.25)$$

Мұндағы τ_d — сыртқы кедергі моменттері.

Бұл теңдеуден көрініп тұрғандай, егер модельде қателіктер болса, $e(t)$ нөлге ұмтылмайды, ол белгілі бір шектерде ауытқып тұрады. Бұл мәселені шешу үшін есептелген моментті басқарудың робастты немесе адаптивті нұсқалары қолданылады. Мысалы, PID басқару заңын қосу арқылы тұрақты қателікті жоюға болады:

$$u = \ddot{q}_d + K_v \dot{e} + K_p e + K_i \int e(t) dt \quad (4.26)$$

Интегралдық мүше $K_i \int e(t) dt$ уақыт өте келе жинақталатын модель қателіктерін компенсациялайды.

Енді қорытындыласақ, есептелген моментті басқару әдісі робот қолдың бейсызық динамикасын компенсациялау арқылы жүйені сызықтық түрге

келтіруге мүмкіндік беретіні көрсетілді. Соның нәтижесінде траекторияны қадағалау есебі классикалық PD немесе PID реттегіштері арқылы тиімді шешіледі. Әдістің теориялық негізі ретінде қателік динамикасының екінші ретті сызықтық жүйеге келтірілетіні және басқару коэффициенттерін дұрыс таңдаған жағдайда қадағалау қатесінің нөлге ұмтылатыны дәлелденді. Сонымен қатар модель дәлдігі жеткіліксіз болған жағдайда робастты және адаптивті нұсқаларды қолдану қажеттілігі негізделді.

4.2. Импеданстық басқару

Алты еркіндік дәрежелі гуманоид робот қолы тек бос кеңістікте қозғалып қоймай, сонымен қатар қоршаған ортамен, әсіресе адаммен, яғни insult алған пациентпен немесе қашықтан басқаратын оператормен тікелей физикалық байланысқа түседі. Мұндай жағдайларда тек қана позицияны басқару қауіпті болуы мүмкін. Өйткені роботтың траекториясында кішкене кедергі болса да, қарапайым позициялық контроллер сол кедергіні жеңу үшін қозғалтқыштарға максималды момент береді. Бұл пациентті жарақаттауға немесе роботтың өзін сындыруға әкеп соғуы мүмкін.

Осы мәселені шешу үшін Невилл Хоган 1985 жылы импеданстық басқару тұжырымдамасын ұсынды. Бұл әдіс роботтың позициясын ғана емес, сонымен қатар оның қоршаған ортамен әрекеттесу кезіндегі күштік реакциясын басқаруға бағытталған.

Механикалық импеданс — бұл жүйенің қозғалысқа қаншалықты қарсылық көрсететінін сипаттайтын шама. Электр тізбектеріндегі кедергі ұғымына ұқсас, механикалық жүйелерде де күш пен қозғалыс арасындағы байланысты сипаттайтын эквивалентті «кедергі» болады.

Импеданстық басқарудың негізгі идеясы: роботты қатты, мызғымас механизм ретінде емес, массасы, серпімділігі және бәсеңдеткіші бар масса-серіппе-бәсеңдеткіш жүйесі ретінде ұстау. Реабилитацияға арналған роботтық жүйелерде басқару алгоритмі пациенттің ағымдағы моторлық мүмкіндігіне және нақты уақыттағы кері байланысқа бейімделуі тиіс. Осы тұрғыдан алғанда, EMG-driven және adaptive control тәсілдері терапиялық әсердің даралануын және қауіпсіздігін арттырады [58].

Физикалық тұрғыдан бұл келесідей түсіндіріледі:

- Егер роботтың соңғы атқарушы органына ешқандай сыртқы күш әсер етпесе, ол өзінің қалаулы траекториясымен қозғалады.
- Егер робот кедергіге мысалы, адамның қолына немесе қабырғаға соғылса, ол кедергіні бұзып өтуге тырыспайды. Оның орнына, робот өзін серіппе сияқты ұстап, кері шегінеді. Сыртқы күш неғұрлым көп болса, роботтың қалаулы траекториядан ауытқуы соғұрлым үлкен болады.

Бұл әдіс әсіресе insultтен кейінгі реабилитацияда өте маңызды. Пациенттің бұлшықеттерінде тырысу болған кезде, робот оған күшпен қарсы тұрмай, жұмсақ түрде бейімделуі керек. Ал пациент өз бетімен қозғала алғанда, робот оған көмектесуі немесе жаттығуды қиындату үшін кедергі жасауы тиіс. Осының барлығын импеданс параметрлерін өзгерту арқылы оңай реттеуге болады.

Импеданстық басқарудың мақсаты — роботтың соңғы атқарушы органында келесі мақсатты импеданс теңдеуін қамтамасыз ету:

$$M_d(\ddot{X} - \ddot{X}_d) + B_d(\dot{X} - \dot{X}_d) + K_d(X - X_d) = F_{ext} \quad (4.27)$$

Мұндағы:

- $X, \dot{X}, \ddot{X}$ — роботтың соңғы атқарушы органының нақты позициясы, жылдамдығы және үдеуі;
- $X_d, \dot{X}_d, \ddot{X}_d$ — қалаулы позиция, жылдамдық және үдеу;
- M_d — мақсатты масса матрицасы. Бұл матрица робот қолдың сыртқы күштерге қаншалықты «ауыр» немесе «жеңіл» жауап беретінін сипаттайды;
- B_d — мақсатты бәсеңдету матрицасы. Роботтың қозғалысындағы тұтқырлықты сипаттайды. Бұл матрица тербелістерді болдырмау үшін маңызды;
- K_d — мақсатты қатаңдық матрицасы. Виртуалды серіппенің қатаңдығын көрсетеді. K_d үлкен болса, робот қаттырақ болады және траекторияны дәлірек ұстайды. K_d азайған сайын жүйе жұмсағырақ болады;
- F_{ext} — қоршаған орта немесе адам тарапынан роботқа әсер ететін сыртқы күштер мен моменттер векторы. Бұл күштер роботтың білезігіне орнатылған 6 осьті күш-момент датчигі арқылы өлшенеді.

Бұл теңдеуді позициялық қателік

$$E = X - X_d \quad (4.28)$$

арқылы қайта жазсақ:

$$M_d\ddot{E} + B_d\dot{E} + K_dE = F_{ext} \quad (4.29)$$

Бұл — сыртқы күш F_{ext} әсерінен қозғалатын масса-серіппе-бәсеңдеткіш жүйесінің классикалық теңдеуі. Егер сыртқы күш жоқ болса, онда жүйе:

$$\ddot{E} + M_d^{-1}B_d\dot{E} + M_d^{-1}K_dE = 0 \quad (4.30)$$

теңдеуіне айналады және қателік нөлге ұмтылады, яғни робот X_d траекториясына қайта оралады.

Практикада мақсатты импеданс теңдеуін жүзеге асырудың екі негізгі тәсілі бар. Олар позицияға негізделген адмиттанстық басқару және күшке негізделген импеданстық басқару.

Адмиттанстық басқару тәсілінде роботтың ішкі жағында өте сенімді және дәл позициялық контроллер бар деп есептеледі. Мысалы, өндірістік роботтардың көпшілігінде солай. Адмиттанс — бұл импедансқа кері шама, яғни күштің әсерінен қандай қозғалыс туындайтынын көрсетеді.

Адмиттанстық басқарудың жұмыс істеу принципі бірінші күш-момент датчигі сыртқы әсерді F_{ext} түрінде өлшейді, содан кейін мақсатты импеданс теңдеуі негізінде жаңа, модификацияланған сілтемелік траектория X_r есептеледі:

$$M_d(\ddot{X}_r - \ddot{X}_d) + B_d(\dot{X}_r - \dot{X}_d) + K_d(X_r - X_d) = F_{ext} \quad (4.31)$$

Бұл дифференциалдық теңдеу нақты уақытта сандық интегралдау арқылы шешіледі. Есептелген жаңа X_r позициясы роботтың ішкі позициялық контроллеріне тапсырма ретінде беріледі.

Бұл тәсілдің негізгі артықшылығы — оны қозғалтқыш моменттерін тікелей басқару мүмкіндігі жоқ көптеген өндірістік роботтарға қолдануға болатындығында. Алайда оның кемшілігі де бар: ішкі позициялық циклдің кідірісі салдарынан қаттылық коэффициенті жоғары болғанда немесе жоғары жиілікті күштік әсерлер кезінде жүйе тұрақсыздыққа ұшырауы мүмкін.

Күшке негізделген импеданстық басқару тәсілінде роботтың буындарына берілетін моменттер тікелей есептеледі. Бұл үшін роботтың толық динамикалық моделі қолданылады. Бұл жағынан аталған тәсіл есептелген моментті басқару әдісіне ұқсас, бірақ негізгі мақсат — соңғы атқарушы органның қоршаған ортамен күштік өзара әрекеттесуін қажетті импеданстық қасиеттермен қамтамасыз ету.

Робот қолдың жұмыс кеңістігіндегі динамикалық теңдеуі келесі түрде жазылады:

$$\Lambda(X)\ddot{X} + \mu(X, \dot{X})\dot{X} + F_g(X) = F_c + F_{ext} \quad (4.32)$$

Мұндағы:

- $\Lambda(X)$ — Декарттық кеңістіктегі инерция матрицасы.
- $\mu(X, \dot{X})$ — Декарттық кеңістіктегі Кориолис және центрден тепкіш әсерлер матрицасы.

- F_g — гравитация күштері.
- F_c — контроллер өндіретін басқару күші.

Басқару күші F_c келесідей таңдалады:

$$F_c = \Lambda(X)\ddot{X}^* + \mu(X, \dot{X})\dot{X} + F_g(X) - F_{ext} \quad (4.33)$$

Мұндағы $\ddot{X}^*$ — жаңа басқару заңы, яғни көмекші басқару үдеуі. Оны мақсатты импеданс теңдеуінен аламыз:

$$\ddot{X}^* = \ddot{X}_d + M_d^{-1}(B_d(\dot{X}_d - \dot{X}) + K_d(X_d - X) + F_{ext}) \quad (4.34)$$

Осы F_c күшін буындардағы моменттерге айналдыру үшін Якобианның транспонирленген матрицасы қолданылады:

$$\tau = J^T(q)F_c \quad (4.35)$$

Бұл әдіс өте жоғары өнімділікті қамтамасыз етеді және роботты "жұмсақ" ете алады. Біздің 6-DOF гуманоид робот қолы үшін дәл осы тәсіл ең оңтайлы болып табылады, өйткені реабилитация кезінде қауіпсіздік пен жылдам реакция бірінші орында тұрады.

Инсульттен кейінгі реабилитациялық жаттығулар әртүрлі деңгейдегі көмекті немесе қарсылықты талап етеді. Осы мақсатта 6-DOF робот қолының импеданс параметрлері пациенттің жағдайына қарай бейімделуі тиіс. Реабилитацияның үш негізгі режимі бар:

Пациент қолын мүлдем қозғалта алмаса, робот барлық жұмысты өзі жасайды. Бұл жағдайда импеданстың қатандығы K_d өте жоғары болуы керек, яғни робот қатаң позициялық басқару режимінде жұмыс істейді. Параметрлер келесідей болады:

$$K_d \rightarrow \text{жоғары}, B_d \rightarrow \text{жоғары}, M_d \rightarrow \text{төмен}$$

Пациент қолын аздап қозғалта алады, бірақ мақсатқа жету үшін күші жетпейді. Робот пациенттің бағытын сезіп, оған көмектеседі. Бұл жағдайда қатаңдық орташа деңгейде болады, ал масса мен бәсеңдету төмендейді. Параметрлер келесідей болады:

$$K_d \rightarrow \text{орташа}, B_d \rightarrow \text{орташа}, M_d \rightarrow \text{төмен}$$

Пациенттің бұлшықеттері күшейгенде, робот оған қарсылық көрсетеді, мысалы гантель немесе эспандер сияқты. Бұл жағдайда K_d төмен болады, ал бәсеңдету B_d жоғары болады. Нәтижесінде қозғалыс тұтқыр ортадағыдай қиындайды және пациенттің белсенді күш жұмсауына жағдай жасалады:

$$K_d \rightarrow \text{төмен}, B_d \rightarrow \text{жоғары}, M_d \rightarrow \text{жоғары}$$

Бұл параметрлерді нақты уақыт режимінде ауыстыру адаптивті импеданстық басқару деп аталады. Ол пациенттің қолданған күшіне F_{ext} және оның қажу деңгейіне негізделіп автоматты түрде реттеледі.

Қашықтан басқару кезіндегі жүйе туралы толық ақпарат “ Social Humanoid Robot Ai-Gerim ” деген мақалада жазылған [55].

Енді импеданстық басқарудың тиімділігін көрсету үшін модельдік мысалды қарастырайық. Бірінші қатты ортамен жанасу мысалы. Бұл мысалда роботтың соңғы атқарушы органы X-осі бойымен $X_d = 0.5$ м қашықтыққа баруы керек. Алайда, $X = 0.3$ м нүктесінде кедергі орналасқан деп алайық. Қабырғаның өзіндік қатандығы $K_e = 10000$ Н/м.

Егер мұндай жағдайда қарапайым қатаң траекториялық позициялық басқару, яғни есептелген моментті басқару әдісі кедергімен жанасуды ескермей қолданылса, онда робот қол қабырғаға жеткен сәтте позициялық қате:

$$E = X_d - X = 0.2 \text{ м}$$

Контроллер бұл қателікті жою үшін қозғалтқыштарға максималды ток береді. Нәтижесінде жанасу күші жуық түрде:

$$F_{ext} = K_e E = 2000 \text{ Н}$$

Бұл шамамен 200 кг салмақ күшіне сәйкес келеді және мұндай әсер робот қолдың өзіне де, қоршаған орта объектісіне де қауіпті.

Егер біз импеданстық контроллерді қолдансақ. Мақсатты импеданс параметрлерін келесідей таңдасақ:

$$M_d = 5 \text{ кг}, B_d = 100 \text{ Н} \cdot \text{с/м}, K_d = 200 \text{ Н/м}.$$

Робот қабырғаға тірелген кезде, ол өзін қатаңдығы $K_d = 200 \text{ Н/м}$ болатын серіппе ретінде ұстайды. Тұрақты күйде, яғни жылдамдық пен үдеу нөлге тең болғанда, мақсатты импеданс теңдеуі келесі түрге келеді:

$$K_d(X_d - X) = F_{ext} \quad (4.36)$$

Ал қабырғаның реакция күші:

$$F_{ext} = K_e(X_e - X) \quad (4.37)$$

Мұндағы $X_e = 0.3 \text{ м}$ — қабырғаның орналасу нүктесі.

Осы екі теңдеуді теңестіре отырып, робот қолдың тоқтайтын нақты позициясын табуға болады:

$$\begin{aligned} K_d(X_d - X) &= K_e(X_e - X) \\ X &\approx 0.3039 \end{aligned} \quad (4.38)$$

Бұл роботтың қабырғаны небәрі 3.9 миллиметрге ғана итеретінін білдіреді. Ал жанасу күшінің шамасы:

$$|F_{ext}| \approx 39 \text{ Н}$$

Сонымен, импеданстық басқарудың арқасында контакт күші 2000 Ньютоннан 39 Ньютонға дейін 50 есе азаяды. Бұл әдістің қоршаған ортамен қауіпсіз әрекеттесудегі орасан зор тиімділігін дәлелдейді.

Екінші мысалда робот белсенді-көмекші режимінде жұмыс істейді. Пациент қолын қозғалтуға тырысады, бірақ оның күші тұрақсыз және дірілдейді. Роботтың мақсаты — бұл дірілді басу және пациентті қажетті траекторияға бағыттау.

Бұл үшін мақсатты бәсеңдету B_d жоғары етіп орнатылады, ал қатандық K_d орташа деңгейде болады. Жоғары бәсеңдеткіш жоғары жиілікті дірілдерді жұтып алады, ал қатандық пациентті дұрыс бағытта ұстап тұрады. Нәтижесінде пациенттің дірілдеген күш сигналы роботтың тегіс қозғалыс траекториясына айналады.

Әртүрлі реабилитациялық жаттығулар үшін ұсынылатын импеданс параметрлері төмендегі кестеде келтірілген.

Кесте 7 – Әртүрлі реабилитациялық жаттығулар үшін ұсынылатын импеданс параметрлері

Жаттығу түрі	Масса (M_d), кг	Бәсеңдету (B_d), Н·с/м	Қаттылық (K_d), Н/м	Қолданылу мақсаты
Пассивті	1.0	500	2000	Робот пациенттің қолын толық өзі қозғалтады
Белсенді-көмекші	2.0	200	500	Пациент қозғалады, робот көмектеседі және бағыттайды
Белсенді-қарсылық	5.0	800	100	Робот пациентке бұлшықетті күшейту үшін қарсылық көрсетеді
Дірілді басу	3.0	1000	300	Пациент қолындағы діріл мен спазм әсерін азайту

Қорытындылай келгенде қос мақсатты 6-DOF гуманоид робот қол үшін екі басқару әдісінің тиімділігі негізделді. Есептелген моментті басқару әдісі робот қолдың бос кеңістіктегі қозғалысында жоғары дәлдікті қамтамасыз етсе, импеданстық басқару адаммен немесе қоршаған ортамен өзара әрекеттесу кезінде қауіпсіздік пен икемділікті қамтамасыз етеді. Инсульттен кейінгі реабилитация міндеттерінде осы екі әдісті біріктіріп, яғни гибриді басқару тәсілін қолдану арқылы неғұрлым тиімді нәтижелерге қол жеткізуге болады.

Қорытынды

Осы диссертациялық жұмыста қашықтан басқару және инсульттен кейінгі реабилитация міндеттерін орындауға арналған қос мақсатты 6-DOF гуманоид робот қолды зерттеудің теориялық, алгоритмдік және қолданбалы негіздері жүйелі түрде қарастырылды. Жұмыстың негізгі идеясы — бір роботтық платформаның екі түрлі, бірақ өзара байланысты қолданбада тиімді жұмыс істеуін қамтамасыз ету: біріншісі — дәл және түсінікті қимылдар арқылы қашықтан өзара әрекеттесу, екіншісі — адаммен қауіпсіз физикалық байланыста жұмыс істейтін реабилитациялық жүйе құру. Осыған байланысты диссертацияда робот қолдың кинематикалық және динамикалық модельдері жасалып, траекторияны жоспарлау әдістері талданып, басқару жүйелері әзірленіп, олардың практикалық қолданылу аймақтары негізделді.

Жұмыстың алғашқы маңызды нәтижесі ретінде гуманоид робот қолдар, реабилитациялық робототехника, телеоперация, тактильді кері байланыс, манипулятор кинематикасы мен динамикасы, траекторияны жоспарлау және адам қимылын тану салаларындағы ғылыми әдебиеттерге кешенді шолу жасалды. Әдебиеттерді талдау нәтижесінде классикалық өндірістік міндеттерге арналған қатаң траекториялық басқару тәсілдері мен адаммен өзара әрекеттесуге бағытталған бейімделгіш басқару тәсілдерінің талаптары түбегейлі әртүрлі екені анықталды. Осыдан диссертацияның негізгі ғылыми логикасы қалыптасты: робот қол бір мезгілде жоғары дәлдікті де, қауіпсіз өзара әрекеттесуді де қамтамасыз етуі тиіс.

Екінші маңызды нәтиже ретінде робот қолдың математикалық моделі құрылды. Денавит–Хартенберг параметрлері негізінде тура және кері кинематика есептері шығарылып, соңғы атқарушы органның кеңістіктегі қалпы мен буын бұрыштарының арасындағы байланыс анықталды. Сонымен қатар жұмыс кеңістігі мен сингулярлық конфигурациялар талданып, робот қолдың қауіпті конфигурациялары жүйеленді. Якобиан матрицасы арқылы буындық жылдамдықтар мен соңғы атқарушы органның сызықтық және бұрыштық жылдамдықтары арасындағы байланыс көрсетілді. Бұл нәтиже тек кинематикалық талдау үшін ғана емес, кейінгі траекторияны жоспарлау және басқару жүйелерін құру үшін де теориялық негіз қызметін атқарды.

Үшінші маңызды нәтиже ретінде робот қолдың динамикалық моделі Эйлер–Лагранж және Ньютон–Эйлер тәсілдерінің негізінде қарастырылып, масса-инерция матрицасы, Кориолис және центрден тепкіш әсерлер, гравитациялық және үйкелістік мүшелер қамтылған жалпы қозғалыс теңдеуі алынды. Осы модель нақты басқару заңдарын құруға, траекторияны қадағалау қателігін талдауға және модельдік параметрлердің басқару сапасына әсерін бағалауға мүмкіндік берді. Сондай-ақ SolidWorks ортасында әр буынның массасы, масса центрі және инерция тензоры анықталып, эксперименттік прототиптің динамикалық сипаттамаларын нақтылауға негіз қаланды.

Төртінші нәтиже ретінде робот қолдың эксперименттік прототипінің 3D нұсқасы әзірленді. Бұл кезеңде иық торабының бірнеше конструкциялық шешімі салыстырылып, жетек пен редукторды таңдаудың практикалық

аспектілері қарастырылды. Атап айтқанда, буындарға түсетін жүктемені, конструкцияның беріктігін, материал қасиеттерін және баспа технологиясының шектеулерін ескере отырып, прототиптің механикалық орындалуы негізделді. Осы жұмыс робот қолды тек теориялық модель деңгейінде емес, нақты инженерлік жүйе ретінде қарастыруға мүмкіндік берді.

Бесінші маңызды нәтиже — траекторияны жоспарлау әдістерін жүйелі салыстыру және екі мақсатты қолданба үшін қолайлы алгоритмдерді таңдау. Диссертацияда сызықтық интерполяция, кубтық полиномдар, бесінші дәрежелі полиномдар, RTP, LIN және адаптивті траекторияны жоспарлау әдістері талданды. Бұл талдаудың нәтижесінде бесінші дәрежелі полиномдардың C^2 -тегістікті қамтамасыз ететіні, демек робот қолдың дірілсіз, жұмсақ және жоғары дәлдікпен қозғалуына қолайлы екені көрсетілді. Сонымен қатар қашықтан басқарылатын робот гид үшін RTP және LIN әдістерінің үйлесімі ең орынды шешім екені негізделді: RTP — экспонаттар арасында жылдам орын ауыстыруға, ал LIN — бағытты дәл және түсінікті көрсетуге қолайлы. Ал реабилитациялық қолданба үшін алдын ала берілген қатты траекториядан гөрі адаптивті траекторияны жоспарлау әлдеқайда тиімді екені дәлелденді.

Алтыншы маңызды нәтиже — робот қол үшін екі негізгі басқару тәсілін әзірлеу және олардың қолданылу шекарасын анықтау. Біріншісі — есептелген моментті басқару әдісі. Бұл тәсіл робот қолдың бейсызық динамикасын компенсациялау арқылы жүйені сызықтық түрге келтіреді және траекторияны жоғары дәлдікпен қадағалауға мүмкіндік береді. Жұмыста қателік динамикасы шығарылып, пропорционалдық және дифференциалдық күшейту коэффициенттерін таңдау ережелері берілді. Сонымен қатар модель белгісіздігі болған жағдайда робастты және интегралдық толықтыруы бар басқару нұсқаларының қажеттілігі көрсетілді. Екінші тәсіл — импеданстық басқару. Бұл әдіс робот қолдың тек позициясын емес, сонымен қатар қоршаған ортамен күштік өзара әрекеттесуін де басқаруға мүмкіндік береді. Нәтижесінде робот адаммен байланыс кезінде қатты қарсыласатын жүйе емес, сыртқы күштерге бейімделе алатын қауіпсіз механикалық орта ретінде жұмыс істейді.

Жетінші маңызды нәтиже — реабилитациялық режимдер үшін адаптивті импеданс параметрлерін таңдаудың қағидаларын негіздеу. Пассивті, белсенді-көмекші, белсенді-қарсылық және треморды басу режимдері үшін виртуалды масса, бәсеңдету және қаттылық параметрлерінің салыстырмалы деңгейлері ұсынылды. Бұл нәтиже робот қолдың пациент жағдайына қарай бейімделіп жұмыс істеуін, яғни қажет кезде көмектесу, қажет кезде қарсылық көрсету және қажет кезде жұмсақ түрде жол беру қабілетін қамтамасыз етеді. Сонымен қатар телеоперацияда күштік кері байланыс беру үшін импеданстық басқарудың рөлі де көрсетілді.

Сегізінші нәтиже ретінде MATLAB ортасында сандық модельдер мен визуализациялар жасалып, робот қолдың қозғалысы, буын бұрыштарының өзгерісі, басқарушы моменттер және соңғы атқарушы органның траекториялары зерттелді. Траекторияны қадағалау, жүктеменің өзгеруіне реакция, қатты ортамен жанасу және пациентпен өзара әрекеттесу сценарийлері

талданып, есептелген моментті басқару мен импеданстық басқарудың әрқайсысының артықшылықтары айқын көрсетілді. Бұл нәтижелер қатаң позициялық басқарудың бос кеңістіктегі қозғалыс үшін тиімді екенін, ал жанасу мен реабилитация жағдайында импеданстық басқарудың қауіпсіздік пен икемділік тұрғысынан басым екенін көрсетті.

Осы жұмыстың ғылыми жаңалығы бірнеше бағытта көрінеді. Біріншіден, қашықтан басқару мен реабилитация міндеттерін бір робот қол аясында қарастыруға арналған бірыңғай әдістемелік негіз ұсынылды. Екіншіден, траекторияны жоспарлау әдістері қолданбаға байланысты іріктеліп, олардың нақты міндеттерге сәйкестігі жүйелі түрде негізделді. Үшіншіден, дәл траекториялық басқару мен қауіпсіз күштік өзара әрекеттесуді біріктіруге мүмкіндік беретін басқару архитектурасы қалыптастырылды. Төртіншіден, теориялық модельдеу нәтижелері прототипті жобалау және симуляциялық тексерулермен байланыстырылды.

Жұмыстың практикалық маңызы да айқын. Ұсынылған шешімдер қашықтан басқарылатын робот гидтерді, интерактивті сервистік роботтарды, сондай-ақ инсульттен кейінгі жоғарғы аяқ-қолды оңалтуға арналған роботтық жүйелерді жобалауда қолданылуы мүмкін. Әсіресе бесінші дәрежелі полиномдарға негізделген тегіс траекториялар, RTP/LIN комбинациясы және адаптивті импеданстық басқару принциптері нақты роботтық жүйелерді басқару бағдарламаларын әзірлеуде тікелей пайдалануға жарамды.

Сонымен қатар жұмыс белгілі бір шектеулерді де көрсетеді. Басқару сапасы динамикалық модельдің дәлдігіне тәуелді; сингулярлық конфигурациялар маңында LIN траекториясын жоспарлау қосымша күрделілік туғызады; ал импеданстық басқаруда параметрлерді дұрыс баптамау қозғалыстың шамадан тыс жұмсаруына немесе тұрақсыздыққа алып келуі мүмкін. Сондықтан болашақ зерттеулерде нақты күш-момент датчиктерімен эксперименттік тексеру, адаптивті параметрлік баптау, модельдік қателіктерді онлайн бағалау және науқас күйін автоматты талдау негізінде басқаруды бейімдеу бағыттарын дамыту орынды болып табылады.

Осылайша, диссертациялық жұмыстың негізгі мақсатына қол жеткізілді деп тұжырымдауға болады. Қос мақсатты 6-DOF гуманоид робот қол үшін математикалық модель, траекторияны жоспарлау әдістері, дәл және қауіпсіз басқару заңдары, сондай-ақ қолданбалы инженерлік шешімдер кешені әзірленді. Есептелген моментті басқару робот қолдың бос кеңістіктегі қозғалысында жоғары дәлдікті қамтамасыз етсе, импеданстық басқару адаммен және қоршаған ортамен өзара әрекеттесуде қауіпсіздік пен икемділікті қамтамасыз етеді. Осы екі тәсілді мақсатқа сай үйлестіру робот қолдың функционалдық мүмкіндіктерін кеңейтеді және оны реабилитациялық және қашықтан басқару жүйелерінде тиімді пайдалануға мүмкіндік береді.

1. J. H. E. Cartwright, "Robots and the Precocious Birth of Synthetic Biology," in *R.U.R. and the Vision of Artificial Life*, J. Čejková, Ed. Cambridge, MA: The MIT Press, 2024, pp. 105-116. DOI: 10.7551/mitpress/14760.003.0008.
2. C. S. T. Romulo, L. P. Boscatti, W. S. C. R. Faria, and A. S. Brandão, "Advances in Social Robotics: A Brief Review of Recent Contributions and Innovations," in *_2023 Latin American Robotics Symposium (LARS), 2023 Brazilian Symposium on Robotics (SBR), and 2023 Workshop on Robotics in Education (WRE)_*, 2023, pp. 35-40. doi: 10.1109/LARS/SBR/WRE59448.2023.10332925.
3. A. Henschel, G. Laban, and E. S. Cross, "What Makes a Robot Social? A Review of Social Robots from Science Fiction to a Home or Hospital Near You," *Curr Robot Rep*, vol. 2, no. 1, pp. 9–19, Feb. 2021. doi: 10.1007/s43154-020-00035-0.
4. C. Breazeal, K. Dautenhahn, and T. Kanda, "Social robotics," in *Springer Handbook of Robotics*, B. Siciliano and O. Khatib, Eds. Cham, Switzerland: Springer, 2016, pp. 1935-1972. doi: 10.1007/978-3-319-32552-1_72.
5. J. Miller, "Social Robots: The Friend of the Future or Mechanical Mistake?," *IEEE Technology and Society Magazine*, vol. 41, no. 2, pp. 47-48, 2022. doi: 10.1109/MTS.2022.3173311
6. T. Belpaeme, J. Kennedy, A. Ramachandran, B. Scassellati, and F. Tanaka, "Social robots for education: A review," *Science Robotics*, vol. 3, no. 21, p. eaat5954, 2018. DOI: 10.1126/scirobotics.aat5954.
7. J. Kantorovitch, J. Väre, V. Pehkonen, A. Laikari, and H. Seppälä, "An assistive household robot—doing more than just cleaning," *J. Assistive Technol.*, vol. 8, no. 2, pp. 64–76, Jun. 2014. doi: 10.1108/JAT-08-2013-0024.
8. L. Pasculli, "Genetics, robotics and crime prevention," in *Genetics, Robotics, Law, Punishment*, D. Provolo, S. Riondato, and F. Yenisey, Eds. Padova, Italy: Padova University Press, 2014, pp. 193-200.
9. W. Lawson, K. Sullivan, C. Narber, E. Bekele, and L. M. Hiatt, "Touch recognition and learning from demonstration (LfD) for collaborative human-robot firefighting teams," in *_2016 25th IEEE International Symposium on Robot and Human Interactive Communication (RO-MAN)_*, New York, NY, USA, 2016, pp. 994-999. doi: 10.1109/ROMAN.2016.7745230.
10. M. A. Diftler et al., "Robonaut 2 — Initial activities on-board the ISS," in *_2012 IEEE Aerospace Conference_*, Big Sky, MT, USA, 2012, pp. 1–12. doi: 10.1109/AERO.2012.6187268.
11. P. A. Kelly, L. A. Cox, S. F. Petersen, R. E. Gilder, A. Blann, A. E. Autrey, and K. MacDonell, "The effect of PARO robotic seals for hospitalized patients with dementia: A feasibility study," *Geriatr. Nurs.*, vol. 42, no. 1, pp. 37-45, Jan.-Feb. 2021. doi: 10.1016/j.gerinurse.2020.11.003

12. P. Laryushkin, A. Fomin, and A. Antonov, "Kinematic and singularity analysis of a 4-DOF Delta-type parallel robot," *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, vol. 45, no. 218, 2023, doi: 10.1007/s40430-023-04128-7.
13. T. Nef, M. Mihelj, G. Kiefer, C. Perndl, R. Muller, and R. Riener, "ARMin - Exoskeleton for Arm Therapy in Stroke Patients," in *_2007 IEEE 10th International Conference on Rehabilitation Robotics_*, Noordwijk, Netherlands, 2007, pp. 68–74. doi: 10.1109/ICORR.2007.4428408.
14. A. Frisoli, F. Salsedo, M. Bergamasco, B. Rossi, and M. C. Carboncini, "A Force-Feedback Exoskeleton for Upper-Limb Rehabilitation in Virtual Reality," *Applied Bionics and Biomechanics*, vol. 6, no. 2, pp. 115-126, 2009. doi: 10.1080/11762320902959250.
15. D. Shi, W. Zhang, W. Zhang, L. Ju, and X. Ding, "Human-centred adaptive control of lower limb rehabilitation robot based on human–robot interaction dynamic model," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 162, p. 104340, Aug. 2021. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2021.104340.
16. C. Ochoa Luna, M. H. Rahman, M. Saad, P. S. Archambault, and S. B. Ferrer, "Admittance-Based Upper Limb Robotic Active and Active-Assistive Movements," *International Journal of Advanced Robotic Systems*, vol. 12, no. 9, p. 117, 2015. doi: 10.5772/60784.
17. X. Li, Y. H. Liu, and H. Yu, "Iterative learning impedance control for rehabilitation robots driven by series elastic actuators," *Automatica*, vol. 90, pp. 1-7, Apr. 2018, doi: 10.1016/j.automatica.2017.12.031.
18. A. Mohebbi, "Human-robot interaction in rehabilitation and assistance: a review," *Curr Robot Rep*, vol. 1, pp. 131–144, 2020, doi: 10.1007/s43154-020-00015-4.
19. C. R. Carvalho, J. M. Fernández, A. J. Del-Ama, F. O. Barroso, and J. C. Moreno, "Review of electromyography onset detection methods for real-time control of robotic exoskeletons," *J NeuroEngineering Rehabil*, vol. 20, no. 1, p. 141, 2023. doi: 10.1186/s12984-023-01268-8
20. A. Abdullah, Z. Kausar, A. Hameed, S. R. Shiekh, and H. Khan, "Patient's intention detection and control for sit-stand mechanism of an assistive device for paraplegics," *Biomed. Signal Process. Control.*, vol. 68, p. 102627, 2021, doi: 10.1016/j.bspc.2021.102627.
21. I. G. Aprile et al., "Rehabilitation robotics and allied digital technologies: opportunities, barriers and solutions for improving their clinical implementation. A position paper from the Fit for Medical Robotics Initiative," *Front. Robot. AI*, vol. 12, 2025, doi: 10.3389/frobt.2025.1531067.
22. N. Nostadt, D. A. Abbink, O. Christ, and P. Beckerle, "Embodiment, Presence, and Their Intersections: Teleoperation and Beyond," *ACM Transactions on Human-Robot Interaction*, vol. 9, no. 4, pp. 1-19, 2020. doi: 10.1145/3389210.
23. R. C. Goertz, "Fundamentals of general-purpose remote manipulators," *Nucleonics*, vol. 10, no. 11, pp. 36-42, 1952.
24. Y. Deng, Y. Tang, B. Yang, W. Zheng, S. Liu, and C. Liu, "A Review of Bilateral Teleoperation Control Strategies with Soft Environment," in *2021 6th IEEE*

International Conference on Advanced Robotics and Mechatronics (ICARM), 2021. doi: 10.1109/ICARM52023.2021.9536056

25. C. Pacchierotti and D. Prattichizzo, "Cutaneous/Tactile Haptic Feedback in Robotic Teleoperation: Motivation, Survey, and Perspectives," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 40, pp. 978-998, 2023, doi: 10.1109/TRO.2023.3344027.

26. R. V. Patel, S. F. Atashzar, and M. Tavakoli, "Haptic Feedback and Force-Based Teleoperation in Surgical Robotics," *Proceedings of the IEEE*, vol. 110, no. 7, pp. 1012-1027, July 2022. doi: 10.1109/JPROC.2022.3180052

27. M. Shahbazi, S. F. Atashzar, and R. V. Patel, "A Systematic Review of Multilateral Teleoperation Systems," *IEEE Transactions on Haptics*, vol. 11, no. 3, pp. 338-356, July-Sept. 2018, doi: 10.1109/TOH.2018.2818134.

28. Y. Li, "Stabilization of Teleoperation Systems with Communication Delays: An IMC Approach," *Journal of Robotics*, vol. 2018, Article ID 1018086, 2018. doi: 10.1155/2018/1018086.

29. K. Darvish, L. Penco, J. Ramos, R. Cisneros, J. Pratt, and E. Yoshida, "Teleoperation of Humanoid Robots: A Survey," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 39, no. 3, pp. 1706-1727, Jun. 2023. doi: 10.1109/TRO.2023.3236952

30. G. G. Samatas and T. P. Pachidis, "Inertial Measurement Units (IMUs) in Mobile Robots over the Last Five Years: A Review," *Designs*, vol. 6, no. 1, p. 17, 2022. doi: 10.3390/designs6010017.

31. S. Deshmukh, V. Khatik, and A. Saxena, "Robust fusion model for handling EMG and computer vision data in prosthetic hand control," *IEEE Sensors Letters*, vol. 7, no. 9, pp. 6004804-6004804, 2023, doi: 10.1109/LSENS.2023.3300898.

32. J. Ghattas and D. N. Jarvis, "Validity of inertial measurement units for tracking human motion: a systematic review," *Sports Biomech.*, vol. 23, no. 11, pp. 1853-1866, 2024, doi: 10.1080/14763141.2021.1990383.

33. H. Kang, H. Cha, M. Hwang, S. Yoon, and E. Kim, "Digital Twin Simulation of Teleoperation: Communication Delay Compensation Using LSTM Network," in 2024 24th International Conference on Advanced Communication Technology (ICCAAS), 2024, doi: 10.23919/ICCAAS63016.2024.10773139.

34. H. H. Cheng and J. Hughes, "Enhancing bimanual teleoperation with variable shoulder distance: manipulation in varying-scale of applications," *npj Robotics*, vol. 3, no. 1, Art. no. 38, 2025. doi: 10.1038/s44182-025-00057-w.

35. Y. Dai, C. Xiang, Y. Zhang, Y. Jiang, W. Qu, and Q. Zhang, "A Review of Spatial Robotic Arm Trajectory Planning," *Aerospace*, vol. 9, no. 7, p. 361, Jul. 2022. doi: 10.3390/aerospace9070361.

36. H. Jahanshahi and N. N. Sari, "Robot Path Planning Algorithms: A Review of Theory and Experiment," *arXiv preprint arXiv:1805.08137*, 2018. doi: 10.48550/ARXIV.1805.08137.

37. T. Sandakalum and M. H. Ang, Jr., "Motion Planning for Mobile Manipulators—A Systematic Review," *Machines*, vol. 10, no. 2, p. 97, 2022, doi: 10.3390/machines10020097.

38. J. Kim, S. Kim, S. Kim, and D. Kim, "A practical approach for minimum-time trajectory planning for industrial robots," *Industrial Robot*, vol. 37, no. 1, pp. 51–61, 2010. doi: 10.1108/01439911011009957.
39. S. Kucuk, "Optimal trajectory generation algorithm for serial and parallel manipulators," *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, vol. 48, pp. 219-232, 2017. DOI: 10.1016/j.rcim.2017.04.006
40. M. Jin, M. Qu, Q. Gao, Z. Huang, T. Su, and Z. Liang, "Advanced Trajectory Planning and Control for Autonomous Vehicles with Quintic Polynomials," *Sensors*, vol. 24, no. 24, p. 7928, 2024. doi: 10.3390/s24247928
41. L. Sun and Z. Xu, "Kinematics Analysis and Trajectory Planning of a Six-Degree-of-Freedom Upper Limb Rehabilitation Robot," in 2024 IEEE 7th Information Technology, Networking, Electronic and Automation Control Conference (ITNEC), 2024, doi: 10.1109/ITNEC60942.2024.10732948.
42. O. Khatib, "Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots," *Int. J. Robot. Res.*, vol. 5, no. 1, pp. 90-98, 1986. doi: 10.1177/027836498600500106
43. L. E. Kavraki, P. Svestka, J.-C. Latombe, and M. H. Overmars, "Probabilistic roadmaps for path planning in high-dimensional configuration spaces," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 12, no. 4, pp. 566–580, 1996, doi: 10.1109/70.508439.
44. S. Karaman and E. Frazzoli, "Sampling-based Algorithms for Optimal Motion Planning," *Int. J. Robot. Res.*, vol. 30, no. 7, pp. 846–894, 2011. doi: 10.1177/0278364911406761.
45. M. Ganesan, S. Kandhasamy, B. Chokkalingam, and L. Mihet-Popa, "A Comprehensive Review on Deep Learning-Based Motion Planning and End-to-End Learning for Self-Driving Vehicle," *IEEE Access*, vol. 12, pp. 66031-66067, 2024, doi: 10.1109/ACCESS.2024.3394869.
46. A. Megyeri, N. Wiederhold, Y. Liu, S. Banerjee, and N. K. Banerjee, "Safety and Naturalness Perceptions of Robot-to-Human Handovers Performed by Data-Driven Robotic Mimicry of Human Givers," in 2025 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 2025, doi: 10.1109/ICRA55743.2025.11128747.
47. T. Flash and N. Hogan, "The coordination of arm movements: an experimentally confirmed mathematical model," *J. Neurosci.*, vol. 5, no. 7, pp. 1688-1703, 1985. doi: 10.1523/JNEUROSCI.05-07-01688.1985
48. A. d'Avella, M. Giese, Y. P. Ivanenko, T. Schack, and T. Flash, "Editorial: Modularity in motor control: from muscle synergies to cognitive action representation," *Frontiers in Computational Neuroscience*, vol. 9, no. 126, pp. 1-6, 2015. doi: 10.3389/fncom.2015.00126
49. G. Gulletta, W. Erhagen, and E. Bicho, "Human-Like Arm Motion Generation: A Review," *Robotics*, vol. 9, no. 4, p. 102, 2020. doi: 10.3390/robotics9040102
50. Ijspeert, A. J., Nakanishi, J., Hoffmann, H., Pastor, P., & Schaal, S., "Dynamical Movement Primitives: Learning Attractor Models for Motor Behaviors,"

Neural Computation, vol. 25, no. 2, pp. 328–373, 2013. doi: 10.1162/NECO_a_00393.

51. R. M. Kanko, E. K. Laende, E. M. Davis, W. S. Selbie, and K. J. Deluzio, "Concurrent assessment of gait kinematics using marker-based and markerless motion capture," *J. Biomech.*, vol. 127, p. 110665, Oct. 2021. doi: 10.1016/j.jbiomech.2021.110665.

52. X. Wang, H. Yu, S. Kold, O. Rahbek, and S. Bai, "Wearable sensors for activity monitoring and motion control: A review," *Biomimetic Intell. Robot.*, vol. 3, no. 1, p. 100089, 2023. doi: 10.1016/j.birob.2023.100089

53. S. Payandeh and J. Wael, "Experimental Study of a Deep-Learning RGB-D Tracker for Virtual Remote Human Model Reconstruction," *International Journal of Telemedicine and Applications*, vol. 2021, pp. 5551753, 2021. doi: 10.1155/2021/5551753

54. В.С. Янгулов, "Геометрические и конструктивные соотношения в волновых передачах с промежуточными телами качения," *Известия Томского политехнического университета*. 2008. Т. 312. № 2

55. Baigunchekov, Z., Cao, M., Li, Q., Amanov, B., Zhangabergen, D., Omarov, B., Rakhmatulla, Z., and Yeerzhati, M., Social Humanoid Robot Ai-Gerim., *IEEE 20th Conference on Industrial Electronics and Applications, ICIEA 2025*, DOI: 10.1109/ICIEA65512.2025.11148978

56. Baigunchekov Z., Carbone G., Zhumasheva Z., Amanov B., Zholdassov Y., Tolenov S., Tleukhanov A. Kinematics of the “Ai-Gerim” Robot Arm. *Mechanisms and Machine Science Conference*, 2022, DOI: 10.1007/978-3-031-04870-8_2

57. Ibrayev, S., Amanov, B., Enhancing Orthopedics and Sports Medicine with Lower Limb Exoskeleton Control in Rehabilitation Using Deep Learning-Based Electromyography Signal Classification. *Retos*, Open Access, 2024, Vol. 61, pp. 616–625.

58. Ibrayev, S., Omarov, B., Amanov, B., Momynkulov, Z., Development of a Deep Learning-Enhanced Lower-Limb Exoskeleton Using Electromyography Data for Post-Neurovascular Rehabilitation. *Engineered Science*, Open Access, 2024, Vol. 31, p. 1269.

Қосымша 1

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}_{11} &= \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_1}{\partial \theta_1} = \mathbf{Q}_1 {}^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{U}_{22} &= \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_2}{\partial \theta_2} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 & 0 & -s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ c_2 & 0 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1s_2 & 0 & -c_1c_2 & 0 \\ -s_1s_2 & 0 & -s_1c_2 & 0 \\ c_2 & 0 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{U}_{21} &= \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_2}{\partial \theta_1} = \mathbf{Q}_1 {}^0\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1c_2 & -c_1 & s_1s_2 & 0 \\ c_1s_2 & s_1 & -c_1s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{U}_{31} &= \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_3}{\partial \theta_1} = \mathbf{Q}_1 {}^0\mathbf{A}_3 \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ s_3 & 0 & -c_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -c_1s_3 - c_2c_3s_1 & s_1s_2 & c_1s_3 - c_2s_1s_3 & -L_2s_1s_2 \\ c_1c_2c_3 - s_1s_3 & -c_1s_2 & c_3s_1 + c_1c_2s_3 & L_2c_1s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{U}_{41} &= \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_4}{\partial \theta_1} = \mathbf{Q}_1 {}^0\mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\quad \begin{pmatrix} c_2 & 0 & -s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ s_3 & 0 & -c_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} s_1s_2s_4 - c_4(c_1s_3 + c_2c_3s_1) & c_1c_3 - c_2s_1s_1 & -s_4(c_1s_3 + c_2c_3s_1) - c_4s_1s_2 \\ -c_4(s_1s_3 - c_1c_2c_3) - c_1c_2c_4 & c_3s_1 + c_1c_2s_3 & c_1c_4s_2 - s_4(s_1s_3 - c_1c_2c_3) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -L_2 s_1 s_2 \\ L_2 c_1 c_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{51} = \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_5}{\partial \theta_1} = \mathbf{Q}_1 {}^0\mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c_2 & 0 & -s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ s_3 & 0 & -c_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_5(c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3) - c_5(c_4(c_1 s_3 + c_2 c_3 s_1) - s_1 s_2 s_4) \\ s_5(c_3 s_1 - c_1 c_2 s_3) - c_5(c_4(s_1 s_3 - c_1 c_2 c_3) + c_1 s_2 s_4) \\ 0 \\ 0 \\ -s_4(c_1 s_3 + c_2 c_3 s_1) - c_4 s_1 s_2 & -s_5(c_4(c_1 s_3 + c_2 c_3 s_1) - s_1 s_2 s_4) - c_5(c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3) \\ c_1 c_4 s_2 - s_4(s_1 s_3 + c_1 c_2 c_3) & -s_5(c_4(s_1 s_3 + c_1 c_2 c_3) - c_1 s_2 s_4) - c_5(c_3 s_1 + c_1 c_2 s_3) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -L_3(s_4(c_1 s_3 + c_2 c_3 s_1) + c_4 s_1 s_2) - L_2 s_1 s_2 \\ L_2 c_1 s_2 - L_3(s_4(s_1 s_3 - c_1 c_2 c_3) - c_1 c_4 s_2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{61} = \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_6}{\partial \theta_1} = \mathbf{Q}_1 {}^0\mathbf{A}_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c_2 & 0 & -s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ s_3 & 0 & -c_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & a_6 c_6 \\ s_6 & c_6 & 0 & a_6 s_6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -s_6(s_4(c_1 s_3 + c_2 c_3 s_1) + c_4 s_1 s_2) - c_6(c_5(c_4(c_1 s_3 + c_2 c_3 s_1) - s_1 s_2 s_4) - \\ -s_6(s_4(s_1 s_3 - c_1 c_2 c_3) - c_1 c_4 s_2) - c_6(c_5(c_4(s_1 s_3 - c_1 c_2 c_3) + c_1 s_2 s_4) - \\ 0 \\ 0 \\ -s_5(c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3)) \\ -s_5(c_3 s_1 + c_1 c_2 s_3)) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& S_6(C_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1 - S_1S_2S_4) - S_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3)) - C_6(S_4(C\theta_1S_3 + C_2C_3S_4 + \\
& \quad S_6(C_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3 + C_1S_2S_4) - S_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3)) - C_6(S_4(S_1S_3 - \\
& \quad 0 \\
& \quad 0 \\
& \quad + C_4S_1S_2) - S_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) - C_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3) \\
& - C_1C_2C_3 - C_1C_4C_2) - S_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) - C_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3) \\
& \quad 0 \\
& \quad 0 \\
& - L_3(S_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) + C_4S_1S_2) - L_4C_6(C_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) - \\
& - L_2C_1S_2 - L_3(S_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2) - L_4S_6(S_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2) - \\
& \quad 0 \\
& \quad 0 \\
& - S_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3)) - L_2S_1S_2 - L_4S_6(S_4(S_1S_3 + C_2C_3S_1) + C_4S_1S_2) \\
& \quad - L_4C_6(C_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) - C_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3))
\end{aligned}$$

$$\mathbf{U}_{32} = \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_3}{\partial \theta_2} = {}^0\mathbf{A}_1\mathbf{Q}_2{}^1\mathbf{A}_2{}^2\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ S_3 & 0 & -C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & C_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} -C_1C_3S_2 & -C_1C_2 & -C_1S_2S_3 & L_2C_1C_2 \\ -C_3S_1S_2 & C_2S_1 & -S_1S_2S_3 & L_2C_2S_1 \\ C_2C_3 & -S_2 & C_2S_3 & L_2S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{U}_{42} = \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_3}{\partial \theta_2} = {}^0\mathbf{A}_1\mathbf{Q}_2{}^1\mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ S_3 & 0 & -C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & C_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_4 & 0 & S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & -C_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} -C_1(C_2S_4 + C_3C_4S_2) & -C_1S_2S_3 & C_1(C_2C_4 - C_3S_2S_4) & L_3C_1C_2 \\ -S_1(C_2S_4 + C_3C_4S_2) & -S_1S_2S_3 & S_1(C_2C_4 - C_3S_2S_4) & L_2C_2S_1 \\ C_2C_3C_4 - S_2S_4 & C_2S_3 & C_4S_2 + C_2C_3S_4 & L_2S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{U}_{52} = \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_5}{\partial \theta_2} = {}^0\mathbf{A}_1\mathbf{Q}_2{}^1\mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ S_3 & 0 & -C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_4 & 0 & S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & -C_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -C_1(C_5S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5 & C_1(C_2C_4 - C_3S_2S_4) & -C_1(S_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) - C_5S_2S_3) & C_1(L_3(C_2C_4 - C_3S_2S_4) - L_4C_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) - S_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4)) \\ -S_1(C_5S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5 & S_1(C_2C_4 - C_3S_2S_4) & -S_1(S_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) - C_5S_2S_3) & S_1(L_3(C_2C_4 - C_3S_2S_4) - L_4C_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) - S_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4)) \\ C_2S_3S_5 - C_5(S_2S_4 - C_2C_3C_4) & C_4S_2 + C_2C_3S_4 & -S_5(S_2S_4 - C_2C_3C_4) - C_2C_5S_3 & L_3(C_4S_2 + C_2C_3S_4) + L_2C_2 + L_4S_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4) - L_4C_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) - S_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4) + C_2C_3S_4 - L_4C_6(C_5(S_2S_4 - C_2C_3C_4) - C_2S_3S_5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{62} = \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_6}{\partial \theta_2} = {}^0\mathbf{A}_1 \mathbf{Q}_2 {}^1\mathbf{A}_6 = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ S_3 & 0 & -C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_4 & 0 & S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & -C_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & L_4C_6 \\ S_6 & C_6 & 0 & L_4S_6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -C_1(C_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) - S_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4)) & C_1(L_3(C_2C_4 - C_3S_2S_4) + L_2C_2 + L_4S_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4) - L_4C_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) - S_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4)) \\ -S_1(C_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) - S_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4)) & S_1(L_3(C_2C_4 - C_3S_2S_4) + L_2C_2 + L_4S_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4) - L_4C_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) - S_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4)) \\ S_6(C_2S_4 + C_2C_3S_4) - C_6(C_5(S_2S_4 - C_2C_3C_4) - C_2S_3S_5) & L_3(C_4S_2 + C_2C_3S_4) + L_2C_2 + L_4S_6(C_4S_2 + C_2C_3S_4) - L_4C_6(C_5(S_2S_4 - C_2C_3C_4) - C_2S_3S_5) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_1(S_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) + C_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4)) & C_1(L_3(C_2C_4 - C_3S_2S_4) + L_2C_2 + L_4S_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4) - L_4C_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) - S_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4)) \\ S_1(S_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) + C_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4)) & S_1(L_3(C_2C_4 - C_3S_2S_4) + L_2C_2 + L_4S_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4) - L_4C_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) - S_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4)) \\ S_6(C_5(S_2S_4 - C_2C_3C_4) - C_2S_3S_5) + C_6(C_4S_2 + C_2C_3S_4) & L_3(C_4S_2 + C_2C_3S_4) + L_2C_2 + L_4S_6(C_4S_2 + C_2C_3S_4) - L_4C_6(C_5(S_2S_4 - C_2C_3C_4) - C_2S_3S_5) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -C_1(S_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) - C_5S_2S_3) & C_1(L_3(C_2C_4 - C_3S_2S_4) + L_2C_2 + L_4S_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4) - L_4C_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) - S_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4)) \\ -S_1(S_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) - C_5S_2S_3) & S_1(L_3(C_2C_4 - C_3S_2S_4) + L_2C_2 + L_4S_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4) - L_4C_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) - S_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4)) \\ -S_5(S_2S_4 - C_3C_4S_2) - C_2C_5S_3 & L_3(C_4S_2 + C_2C_3S_4) + L_2C_2 + L_4S_6(C_4S_2 + C_2C_3S_4) - L_4C_6(C_5(S_2S_4 - C_2C_3C_4) - C_2S_3S_5) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{33} = \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_3}{\partial \theta_3} = {}^0\mathbf{A}_2 \mathbf{Q}_3 {}^2\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ S_3 & 0 & -C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} -C_3S_1 - C_1C_2S_3 & 0 & C_1C_2C_3 - S_1S_3 & 0 \\ C_1C_3 - C_2S_1S_3 & 0 & C_1S_3 + C_2C_3S_1 & 0 \\ -S_2C_3 & 0 & C_3S_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{43} &= \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_4}{\partial \theta_3} = {}^0\mathbf{A}_2\mathbf{Q}_3 {}^2\mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ S_3 & 0 & -C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & C_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_4 & 0 & S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & -C_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -C_3C_4S_1 - C_1C_2C_3S_3 & C_1C_2C_3 - S_1S_3 & -C_3S_1S_4 - C_1C_2S_3S_4 & 0 \\ C_1C_3C_4 - C_2C_4S_1S_3 & C_1S_3 + C_2C_3S_1 & C_1C_3S_4 - C_2S_1S_3S_4 & 0 \\ -C_4S_2S_3 & C_3S_2 & -S_2S_3S_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{53} &= \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_5}{\partial \theta_3} = {}^0\mathbf{A}_2\mathbf{Q}_3 {}^2\mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ S_3 & 0 & -C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_4 & 0 & S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & -C_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1C_2(C_3S_5 - C_4C_5S_3) - S_1(S_3S_5 + C_3C_4C_5) & & & \\ C_1(S_3S_5 + C_3C_4C_5) + S_2(S_1(C_3S_5 - C_4C_5S_3)) & & & \\ S_2(C_3S_5 - C_4C_5S_3) & & & \\ 0 & & & \\ -C_3S_1S_4 - C_1C_2S_3S_4 & S_1(C_5S_3 - C_3C_4S_5) - C_1C_2(C_3C_5 + C_4S_3S_5) & & \\ C_1C_3S_4 - C_2S_1S_3S_4 & -C_1(C_5S_3 - C_3C_4S_5) - C_2S_1(C_3C_5 + C_4S_3S_5) & & \\ -S_2S_3S_4 & -S_2(C_3C_5 + C_4S_3S_5) & & \\ 0 & 0 & & \\ -L_3C_3S_1S_4 - L_3C_1C_2S_3S_4 & & & \\ -L_3C_1C_3S_4 - L_3C_2S_1S_3S_4 & & & \\ -L_3S_2S_3S_4 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{63} &= \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_6}{\partial \theta_3} = {}^0\mathbf{A}_2\mathbf{Q}_3 {}^2\mathbf{A}_6 = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ S_3 & 0 & -C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_4 & 0 & S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & -C_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & a_6 C_6 \\ S_6 & C_6 & 0 & a_6 S_6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
= \begin{pmatrix} C_1 C_2 (C_6 (C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) - S_3 S_4 S_6) - S_1 (C_6 (S_3 S_5 + C_3 C_4 C_5) + C_3 S_4 S_6) \\ C_1 (C_6 (S_3 S_5 - C_3 C_4 C_5) + C_3 S_4 S_6) + C_2 S_1 (C_6 (C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) - S_3 S_4 S_6) \\ S_6 (C_2 S_4 + C_2 C_3 S_4) - C_6 (C_5 (S_2 S_4 - C_2 C_3 C_4 - C_2 S_3 S_5)) \\ 0 \\ S_1 (S_6 (S_3 S_5 + C_3 C_4 C_5) - C_3 C_6 S_4) - C_1 C_2 (S_6 (C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) + C_6 S_3 S_4) \\ -C_1 (S_6 (S_3 S_5 + C_3 C_4 C_5) - C_3 C_6 S_4) - C_1 C_2 (S_6 (C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) + C_6 S_3 S_4) \\ -S_2 (S_6 (C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) + C_6 S_3 S_4) \\ 0 \\ S_1 (C_5 S_3 - C_3 C_4 S_5) - C_1 C_2 (C_3 C_5 + C_4 S_3 S_5) \\ -C_1 (C_5 S_3 - C_3 C_4 S_5) - C_2 S_1 (C_3 C_5 + C_4 S_3 S_5) \\ -S_2 (C_3 C_5 + C_4 S_3 S_5) \\ 0 \\ -S_1 (L_4 C_6 (S_3 S_5 + C_3 C_4 C_5) + L_3 C_3 S_4 + L_4 C_3 S_4 S_6) - C_1 C_2 (L_3 S_3 S_4 - L_4 C_6 (C_3 S_5 - \\ C_1 (L_4 C_6 (S_3 S_5 + C_3 C_4 C_5) + L_3 C_3 S_4 + L_4 C_3 S_4 S_6) - C_1 C_2 (L_3 S_3 S_4 - L_4 C_6 (C_3 S_5 - \\ -S_2 (L_3 S_3 S_4 - L_4 C_6 (C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) + L_4 S_3 S_4 S_6) \\ 0 \\ -C_4 C_5 S_3) + L_4 S_4 S_6) \\ -C_4 C_5 S_3) + L_4 S_4 S_6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{44} = \frac{\partial {}^0 \mathbf{A}_4}{\partial \theta_4} = {}^0 \mathbf{A}_3 \mathbf{Q}_4 {}^3 \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ S_3 & 0 & -C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_4 & 0 & S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & -C_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
= \begin{pmatrix} S_4 (S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) - C_1 C_2 C_3 - C_1 C_4 S_2 & 0 & -C_4 (S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) - C_1 S_2 S_4 & 0 \\ -S_4 (C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) + C_2 C_3 S_1 - C_4 S_1 S_2 & 0 & C_4 (C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) - S_1 S_2 S_4 & 0 \\ C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4 & 0 & C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{54} = \frac{\partial {}^0 \mathbf{A}_5}{\partial \theta_4} = {}^0 \mathbf{A}_3 \mathbf{Q}_4 {}^3 \mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ S_3 & 0 & -C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_4 & 0 & S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & -C_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} C_5 S_4 (S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) - C_1 C_4 C_5 S_2 & -C_4 (S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) - C_1 S_2 S_4 \\ -C_5 S_4 (S_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) - C_4 C_5 S_1 S_2 & C_4 (C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) - S_1 S_2 S_4 \\ C_2 C_4 C_5 - C_3 C_5 S_2 S_4 & C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2 \\ 0 & 0 \\ S_4 S_5 (S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) - C_1 C_4 S_2 S_5 & -L_3 C_4 (S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) - L_3 C_1 S_2 S_4 S_5 \\ -S_4 S_5 (C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) - C_4 S_1 S_2 S_5 & L_3 C_4 (C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) - L_3 C_1 S_2 S_4 S_5 \\ C_2 C_4 S_5 - C_3 S_2 S_4 S_5 & L_3 C_2 S_4 + L_3 C_3 C_4 S_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{64} &= \frac{\partial {}^0 \mathbf{A}_6}{\partial \theta_4} = {}^0 \mathbf{A}_3 \mathbf{Q}_4 {}^3 \mathbf{A}_6 = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ S_3 & 0 & -C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_4 & 0 & S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & -C_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -(S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3)(C_4 S_6 - C_5 C_6 S_4) - C_1 S_2 (S_4 S_6 + C_4 C_5 C_6) \\ (C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1)(C_4 S_6 - C_5 C_6 S_4) - C_1 S_2 (S_4 S_6 + C_4 C_5 C_6) \\ C_2 (S_4 S_6 + C_4 C_5 C_6) + C_3 S_2 (C_4 S_6 - C_5 C_6 S_4) \\ 0 \\ -(S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3)(C_4 C_6 + C_5 S_4 S_6) - C_1 S_2 (C_6 S_4 - C_4 S_5 S_6) \\ (C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1)(C_4 C_6 + C_5 S_4 S_6) - S_1 S_2 (C_6 S_4 - C_4 S_5 S_6) \\ C_2 (C_6 S_4 - C_4 C_5 S_6) + C_3 S_2 (C_4 C_6 + C_5 S_4 S_6) \\ 0 \\ S_4 S_5 (S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) - C_1 C_4 S_2 S_5 \\ -S_4 S_5 (C_1 S_3 - C_2 C_3 S_1) - C_4 S_1 S_2 S_5 \\ C_2 C_4 S_5 - C_3 S_2 S_4 S_5 \\ 0 \\ -(S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3)(L_3 C_4 + L_4 C_4 S_6 - L_4 C_5 C_6 S_4) - C_1 S_2 (L_3 S_4 + L_4 S_4 S_6 + L_4 C_4 C_5 C_6) \\ (C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1)(L_3 C_4 + L_4 C_4 S_6 - L_4 C_5 C_6 S_4) - S_1 S_2 (L_3 S_4 + L_4 S_4 S_6 + L_4 C_4 C_5 C_6) \\ C_2 (L_3 S_4 + L_4 S_4 S_6 + L_4 C_4 C_5 C_6) + C_3 S_2 (L_4 S_4 + L_4 C_4 S_6 - L_4 C_5 C_6 S_4) \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{55} &= \frac{\partial {}^0 \mathbf{A}_5}{\partial \theta_5} = {}^0 \mathbf{A}_4 \mathbf{Q}_5 {}^4 \mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ S_3 & 0 & -C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_4 & 0 & S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & -C_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} S_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) + C_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3) & 0 \\ -S_5(C_4(S_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) - S_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3) & 0 \\ C_5S_2S_3 - S_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) & 0 \\ 0 & 0 \\ S_5(C_3S_1 + C_1C_2C_3) - C_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) & 0 \\ C_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) - S_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3) & 0 \\ C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{65} = \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_6}{\partial \theta_5} = {}^0\mathbf{A}_4\mathbf{Q}_5{}^4\mathbf{A}_6 &= \begin{pmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ S_3 & 0 & -C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_4 & 0 & S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & -C_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} C_6S_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) + S_5C_6(C_3S_1 + C_1C_2S_3) \\ -C_6S_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) - C_5C_6(C_1C_3 - C_2S_1S_3) \\ C_5C_6S_2S_3 - C_6S_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) \\ 0 \\ -S_5S_6(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) - C_5S_6(C_3S_1 + C_1C_2S_3) \\ S_5S_6(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) + C_5S_6(C_1C_3 - C_2S_1S_3) \\ S_5S_6(C_2S_4 + C_3C_4S_2) - C_5S_2S_3S_6 \\ 0 \\ S_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3) - C_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) \\ C_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) - S_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3) \\ C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5 \\ 0 \\ L_4C_6S_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) + L_4C_5C_6(C_3S_1 + C_1C_2S_3) \\ -L_4C_6S_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) - L_4C_5C_6(C_1C_3 + C_2S_1S_3) \\ -L_4C_5C_6S_2S_3 - L_4C_6S_5(C_2S_4 + L_3C_4S_2) \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{66} = \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_6}{\partial \theta_6} = {}^0\mathbf{A}_5\mathbf{Q}_6{}^5\mathbf{A}_6 &= \begin{pmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ S_3 & 0 & -C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_4 & 0 & S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & -C_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} C_6(C_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) - S_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3)) - S_6(S_4(S_1S_3 - \\ C_6(S_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) + C_4S_1S_2) - S_6(C_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) - \\ -S_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) - C_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4) \\ -S_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) - C_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -C_1C_2C_3 - C_1C_4S_2)) \quad S_6(S_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2) + C_6(C_5(C_4(S_1S_3 - \\
& -S_5(C_1(C_1C_3 - C_2S_1S_3))) \quad -S_6(S_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) + C_4S_1S_2) - C_6(C_5(C_4(C_1S_3 + \\
& \quad S_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4) - C_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5 \\
& \quad \quad \quad 0 \\
& -C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) - S_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3)) \quad 0 \\
& +C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) - S_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3)) \quad 0 \\
& \quad \quad \quad 0 \\
& \quad \quad \quad 0 \\
& L_4S_6(C_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) - S_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3)) - \\
& L_4C_6(S_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) + C_4S_1S_2) - L_4S_6(C_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - \\
& \quad -L_4C_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4) - L_4S_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5 \\
& \quad \quad \quad 0 \\
& -L_4C_6(S_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2)) \quad \left. \begin{array}{l} \\ -S_1S_2S_4) - S_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3) \end{array} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{111} &= \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0\mathbf{A}_1 \\
\mathbf{U}_{211} &= \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0\mathbf{A}_1 \cdot {}^1\mathbf{A}_2 \\
\mathbf{U}_{311} &= \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0\mathbf{A}_1 \cdot {}^1\mathbf{A}_2 \cdot {}^2\mathbf{A}_3 \\
\mathbf{U}_{411} &= \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0\mathbf{A}_1 \cdot {}^1\mathbf{A}_2 \cdot {}^2\mathbf{A}_3 \cdot {}^3\mathbf{A}_4 \\
\mathbf{U}_{511} &= \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0\mathbf{A}_1 \cdot {}^1\mathbf{A}_2 \cdot {}^2\mathbf{A}_3 \cdot {}^3\mathbf{A}_4 \cdot {}^4\mathbf{A}_5 \\
\mathbf{U}_{611} &= \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0\mathbf{A}_1 \cdot {}^1\mathbf{A}_2 \cdot {}^2\mathbf{A}_3 \cdot {}^3\mathbf{A}_4 \cdot {}^4\mathbf{A}_5 \cdot {}^5\mathbf{A}_6 \\
\mathbf{U}_{221} &= \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot {}^1\mathbf{A}_2 \\
\mathbf{U}_{321} &= \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot {}^1\mathbf{A}_2 \cdot {}^2\mathbf{A}_3 \\
\mathbf{U}_{421} &= \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot {}^1\mathbf{A}_2 \cdot {}^2\mathbf{A}_3 \cdot {}^3\mathbf{A}_4 \\
\mathbf{U}_{521} &= \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot {}^1\mathbf{A}_2 \cdot {}^2\mathbf{A}_3 \cdot {}^3\mathbf{A}_4 \cdot {}^4\mathbf{A}_5 \\
\mathbf{U}_{621} &= \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot {}^1\mathbf{A}_2 \cdot {}^2\mathbf{A}_3 \cdot {}^3\mathbf{A}_4 \cdot {}^4\mathbf{A}_5 \cdot {}^5\mathbf{A}_6 \\
\mathbf{U}_{331} &= \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0\mathbf{A}_1 \cdot {}^1\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{Q}_3 \cdot {}^2\mathbf{A}_3 \\
\mathbf{U}_{431} &= \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0\mathbf{A}_1 \cdot {}^1\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{Q}_3 \cdot {}^2\mathbf{A}_3 \cdot {}^3\mathbf{A}_4 \\
\mathbf{U}_{531} &= \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0\mathbf{A}_1 \cdot {}^1\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{Q}_3 \cdot {}^2\mathbf{A}_3 \cdot {}^3\mathbf{A}_4 \cdot {}^4\mathbf{A}_5 \\
\mathbf{U}_{631} &= \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0\mathbf{A}_1 \cdot {}^1\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{Q}_3 \cdot {}^2\mathbf{A}_3 \cdot {}^3\mathbf{A}_4 \cdot {}^4\mathbf{A}_5 \cdot {}^5\mathbf{A}_6 \\
\mathbf{U}_{441} &= \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0\mathbf{A}_1 \cdot {}^1\mathbf{A}_2 \cdot {}^2\mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{Q}_4 \cdot {}^3\mathbf{A}_4 \\
\mathbf{U}_{541} &= \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0\mathbf{A}_1 \cdot {}^1\mathbf{A}_2 \cdot {}^2\mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{Q}_4 \cdot {}^3\mathbf{A}_4 \cdot {}^4\mathbf{A}_5 \\
\mathbf{U}_{641} &= \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0\mathbf{A}_1 \cdot {}^1\mathbf{A}_2 \cdot {}^2\mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{Q}_4 \cdot {}^3\mathbf{A}_4 \cdot {}^4\mathbf{A}_5 \cdot {}^5\mathbf{A}_6 \\
\mathbf{U}_{551} &= \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0\mathbf{A}_1 \cdot {}^1\mathbf{A}_2 \cdot {}^2\mathbf{A}_3 \cdot {}^3\mathbf{A}_4 \cdot \mathbf{Q}_5 \cdot {}^4\mathbf{A}_5 \\
\mathbf{U}_{651} &= \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0\mathbf{A}_1 \cdot {}^1\mathbf{A}_2 \cdot {}^2\mathbf{A}_3 \cdot {}^3\mathbf{A}_4 \cdot \mathbf{Q}_5 \cdot {}^4\mathbf{A}_5 \cdot {}^5\mathbf{A}_6 \\
\mathbf{U}_{661} &= \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0\mathbf{A}_1 \cdot {}^1\mathbf{A}_2 \cdot {}^2\mathbf{A}_3 \cdot {}^3\mathbf{A}_4 \cdot {}^4\mathbf{A}_5 \cdot \mathbf{Q}_6 \cdot {}^5\mathbf{A}_6 \\
\mathbf{U}_{212} &= \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot {}^1\mathbf{A}_2 \\
\mathbf{U}_{312} &= \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot {}^1\mathbf{A}_2 \cdot {}^2\mathbf{A}_3 \\
\mathbf{U}_{412} &= \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot {}^1\mathbf{A}_2 \cdot {}^2\mathbf{A}_3 \cdot {}^3\mathbf{A}_4 \\
\mathbf{U}_{512} &= \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot {}^1\mathbf{A}_2 \cdot {}^2\mathbf{A}_3 \cdot {}^3\mathbf{A}_4 \cdot {}^4\mathbf{A}_5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{624} &= {}^0A_1 \cdot Q_2 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot Q_4 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 \cdot {}^5A_6 \\
U_{434} &= {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot Q_3 \cdot {}^2A_3 \cdot Q_4 \cdot {}^3A_4 \\
U_{534} &= {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot Q_3 \cdot {}^2A_3 \cdot Q_4 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 \\
U_{634} &= {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot Q_3 \cdot {}^2A_3 \cdot Q_4 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 \cdot {}^5A_6 \\
U_{444} &= {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot Q_4 \cdot Q_4 \cdot {}^3A_4 \\
U_{544} &= {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot Q_4 \cdot Q_4 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 \\
U_{644} &= {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot Q_4 \cdot Q_4 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 \cdot {}^5A_6 \\
U_{554} &= {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot Q_4 \cdot {}^3A_4 \cdot Q_5 \cdot {}^4A_5 \\
U_{654} &= {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot Q_4 \cdot {}^3A_4 \cdot Q_5 \cdot {}^4A_5 \cdot {}^5A_6 \\
U_{664} &= {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot Q_4 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 \cdot Q_6 \cdot {}^5A_6 \\
U_{515} &= Q_1 \cdot {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot Q_5 \cdot {}^4A_5 \\
U_{615} &= Q_1 \cdot {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot Q_5 \cdot {}^4A_5 \cdot {}^5A_6 \\
U_{525} &= {}^0A_1 \cdot Q_2 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot Q_5 \cdot {}^4A_5 \\
U_{625} &= {}^0A_1 \cdot Q_2 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot Q_5 \cdot {}^4A_5 \cdot {}^5A_6 \\
U_{535} &= {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot Q_3 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot Q_5 \cdot {}^4A_5 \\
U_{635} &= {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot Q_3 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot Q_5 \cdot {}^4A_5 \cdot {}^5A_6 \\
U_{545} &= {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot Q_4 \cdot {}^3A_4 \cdot Q_5 \cdot {}^4A_5 \\
U_{645} &= {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot Q_4 \cdot {}^3A_4 \cdot Q_5 \cdot {}^4A_5 \cdot {}^5A_6 \\
U_{555} &= {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot Q_5 \cdot Q_5 \cdot {}^4A_5 \\
U_{655} &= {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot Q_5 \cdot Q_5 \cdot {}^4A_5 \cdot {}^5A_6 \\
U_{665} &= {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot Q_5 \cdot {}^4A_5 \cdot Q_6 \cdot {}^5A_6 \\
U_{616} &= Q_1 \cdot {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 \cdot Q_6 \cdot {}^5A_6 \\
U_{626} &= {}^0A_1 \cdot Q_2 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 \cdot Q_6 \cdot {}^5A_6 \\
U_{636} &= {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot Q_3 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 \cdot Q_6 \cdot {}^5A_6 \\
U_{646} &= {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot Q_4 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 \cdot Q_6 \cdot {}^5A_6 \\
U_{656} &= {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot Q_5 \cdot {}^4A_5 \cdot Q_6 \cdot {}^5A_6 \\
U_{666} &= {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 \cdot Q_6 \cdot Q_6 \cdot {}^5A_6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{111} &= \frac{\partial U_{11}}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ -S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
U_{211} &= \frac{\partial U_{21}}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -C_1 C_2 & S_1 & C_1 S_2 & 0 \\ -C_2 S_1 & -C_1 & S_1 S_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
U_{311} &= \frac{\partial U_{31}}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3 & C_1 S_2 & -C_3 S_1 - C_1 C_2 S_3 & -L_2 C_1 S_2 \\ -C_1 S_3 - C_2 C_3 S_1 & S_1 S_2 & C_1 C_3 - C_2 S_1 S_3 & -L_2 S_1 S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{411} &= \frac{\partial \mathbf{U}_{41}}{\partial \theta_1} = \begin{pmatrix} C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4 & -C_3S_1 - C_1C_2S_3 \\ S_1S_2S_4 - C_4(C_1S_3 - C_2C_3S_1) & C_1C_3 - C_2S_1S_3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ S_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2 & -L_2C_1S_2 \\ -S_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - C_4S_1S_2 & -L_2S_1S_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{511} &= \frac{\partial \mathbf{U}_{51}}{\partial \theta_1} = \begin{pmatrix} C_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) - S_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3) \\ S_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3) - C_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) \\ 0 \\ 0 \\ S_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2 & S_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) + C_5(C_3S_1 - C_1C_2S_3) \\ -S_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - C_4S_1S_2 & -S_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) - C_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ L_3(S_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2) - L_2C_1S_2 \\ -L_3(S_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) + C_4S_1S_2) - L_2S_1S_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{611} &= \begin{pmatrix} S_6(S_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2) + C_6(C_5(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) - \\ -S_6(S_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) + C_4S_1S_2) - C_6(C_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - \\ 0 \\ 0 \\ -S_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3)) & C_6(S_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2 - S_6(C_5(C_4(S_1S_3 - \\ -S_1S_2S_4) - S_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3))) & S_6(C_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4 - S_5(C_1C_3 - \\ 0 \\ 0 \\ -C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) - S_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3)) \\ -C_2S_1S_3)) - C_6(S_4(C_3S_3 - C_2C_3S_1) + C_4S_1S_2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\hline
& \begin{pmatrix} S_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) + C_5(C_3(S_1 + C_1C_2S_3) \\ -S_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) - C_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3) \\ 0 \\ 0 \\ L_3(S_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2) - L_2C_1S_2 + L_4S_6(S_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2) + \\ -L_4(S_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) + C_4S_1S_2) - L_4C_6(C_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) - \\ \\ +L_4C_6(C_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) - S_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3)) \\ -(S_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3)) - L_2S_1S_2 - L_4S_6(S_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) + C_4S_1S_2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{U}_{221} = \frac{\partial \mathbf{U}_{22}}{\partial \theta_1} = \begin{pmatrix} S_1 S_2 & 0 & C_2 S_1 & 0 \\ -C_1 S_2 & 0 & -C_1 C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{321} = \frac{\partial \mathbf{U}_{22}}{\partial \theta_1} = \begin{pmatrix} C_3 S_1 S_2 & C_2 S_1 & S_1 S_2 S_3 & -L_2 C_2 S_1 \\ -C_1 C_3 S_2 & -C_1 S_2 & -C_1 S_2 S_3 & L_2 C_1 C_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{421} = \frac{\partial \mathbf{U}_{42}}{\partial \theta_1} =$$

$$= \begin{pmatrix} S_1(C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) & S_1 S_2 S_3 & -S_1(C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4) & -L_2 C_2 S_1 \\ -C_1(C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) & -C_1 S_2 S_3 & C_1(C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4) & L_2 C_1 C_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{521} = \frac{\partial \mathbf{U}_{52}}{\partial \theta_1} = \begin{pmatrix} S_1(C_5(C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) + S_2 S_3 S_5) & -S_1(C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4) \\ -C_1(C_5(C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) + S_2 S_3 S_5) & C_1(C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} S_1(S_5(C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) - C_5 C_2 S_3) & -S_1(L_3(C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4) + L_2 C_2) \\ -C_1(S_5(C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) - C_5 S_2 S_3) & C_1(L_3(C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4) + L_2 C_2) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{621} = \frac{\partial \mathbf{U}_{52}}{\partial \theta_1} = \begin{pmatrix} S_1(C_6(C_5(C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) + S_2 S_3 S_5) - S_6(C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4)) \\ -C_1(C_6(C_5(C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) + S_2 S_3 S_5) - S_6(C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4)) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -S_1(S_6(C_5(C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) + S_2 S_3 S_5) + C_6(C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4)) \\ C_1 S_6(C_5(C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) + S_2 S_3 S_5) + C_6(C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} S_1(S_5(C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) - C_5 S_2 S_3) & -S_1(L_3(C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4) + L_2 C_2 + L_4 S_6(C_2 C_4 - \\ -C_1(S_5(C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) - C_5 S_2 S_3) & C_1(L_3(C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4) + L_2 C_2 + L_4 S_6(C_2 C_4 - \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -C_3 S_2 S_4) - L_4 C_6(C_5(C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) + S_2 S_3 S_5)) \\ -C_3 S_2 S_4) - L_4 C_6(C_5(C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) + S_2 S_3 S_5)) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{331} = \frac{\partial \mathbf{U}_{33}}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} C_2 S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3 & 0 & -C_1 S_3 - C_2 C_3 S_1 & 0 \\ -C_3 S_1 - C_2 C_3 S_1 & 0 & C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{431} &= \frac{\partial \mathbf{U}_{43}}{\partial \theta_1} \\
&= \begin{bmatrix} C_2 C_4 S_1 S_3 - C_1 C_3 C_4 & -C_1 S_3 - C_2 C_3 S_1 & C_2 S_1 S_3 S_4 - C_1 C_3 S_4 & 0 \\ -C_1 C_4 S_1 - C_1 C_2 C_4 S_3 & C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3 & -C_3 S_1 S_4 - C_1 C_2 S_3 S_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{U}_{531} &= \frac{\partial \mathbf{U}_{53}}{\partial \theta_1} = \begin{pmatrix} -C_1(S_3 S_5 + C_3 C_4 C_5) - C_2 S_1(C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) \\ C_1 C_2(C_3 S_5 + C_4 C_5 S_3) - S_1(S_3 S_5 - C_3 C_4 C_5) \\ 0 \\ 0 \\ C_2 S_1 S_4 - C_1 C_3 S_4 & C_1(C_5 S_3 - C_3 C_4 S_5) + C_2 S_1(C_3 C_5 + C_4 S_3 S_5) & L_3 C_2 S_1 S_3 S_4 - L_3 C_1 C_3 S_4 \\ S_4(C_3 S_1 - C_1 C_2 S_3) S_1(C_5 S_3 - C_3 C_4 S_5) - C_1 C_2(C_3 C_5 + C_4 S_3 S_5) - L_3 C_3 S_1 S_4 - L_3 C_1 C_2 S_3 S_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{631} &= \frac{\partial \mathbf{U}_{63}}{\partial \theta_1} = \begin{pmatrix} -C_1(C_6(S_3 S_5 + C_3 C_4 C_5) + C_3 S_4 S_6) - C_2 S_1(C_6(C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) - \\ C_1 C_2(C_6(C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) - S_3 S_4 S_6 - S_1(C_6(S_3 S_5 + C_3 C_4 C_5) + \\ 0 \\ 0 \\ -S_3 S_4 S_6 & C_1(S_6(S_3 S_5 + C_3 C_4 C_5) - C_3 C_6 S_4) + C_2 S_1(S_6(C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) + C_6 S_3 S_4) \\ + C_3 S_4 S_5 & S_1(S_6(S_3 S_5 + C_3 C_4 C_5) - C_3 C_6 S_4) - C_1 C_2(S_6(C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) + C_6 S_3 S_4) \\ 0 \\ 0 \\ C_1(C_5 S_3 - C_3 C_4 C_5) + C_2 S_1(C_3 C_5 + C_4 S_3 S_5) & C_2 S_1(L_3 S_3 S_4 - L_4 C_6(C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) + \\ S_1(C_5 S_3 - C_3 C_4 C_5) - C_1 C_2(C_3 C_5 + C_4 S_3 S_5) & -S_1(L_4 C_6(C_3 S_5 + C_3 C_4 C_5) + L_3 C_3 S_4 + \\ 0 \\ 0 \\ + L_4 S_3 S_4 S_6) - C_1(L_4 C_6(S_3 S_5 + C_3 C_4 C_5) + L_3 C_3 S_4 + L_4 C_3 S_4 S_6) \\ + L_4 C_3 S_4 S_6) - C_1 C_2(L_3 S_3 S_4 - L_4 C_6(L_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) + L_4 S_3 S_4 S_6) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{441} &= \frac{\partial \mathbf{U}_{44}}{\partial \theta_1} \\
&= \begin{pmatrix} S_4(C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) + C_4 S_1 S_2 & 0 & S_1 S_2 S_4 - C_4(C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) \\ S_4(S_1 S_3 + C_1 C_2 S_3) + C_1 C_4 S_2 & 0 & -C_4(S_1 S_3 + C_1 C_2 C_3) - C_1 S_2 S_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{541} &= \frac{\partial \mathbf{U}_{54}}{\partial \theta_1} = \begin{pmatrix} C_5 S_4(C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) + C_4 C_5 S_1 S_2 & S_1 S_2 S_4 - C_4(C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) \\ C_5 S_4(S_1 S_3 + C_1 C_2 S_3) - C_1 C_4 C_5 S_2 & C_4(C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3) - C_1 S_2 S_4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} S_4S_5(C_1S_3 + C_2C_3S_1) + C_4S_1S_2S_5 & L_3S_1S_2S_4 + L_3C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) \\ S_4S_5(S_1S_3 + C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2S_5 & -L_3C_4(S_1S_3 + C_1C_2C_3) - L_3C_1S_2S_4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{641} = \frac{\partial \mathbf{U}_{64}}{\partial \theta_1} = & \begin{pmatrix} S_1S_2(S_4S_6 + C_4C_5C_6) - (C_1S_3 + C_2C_3S_1)(C_4S_6 - C_5C_6S_4) \\ -(S_1S_3 + C_1C_2C_3)(C_4S_6 - C_5C_6S_4) - C_1S_2(S_4S_6 + C_4C_5C_6) \\ 0 & 0 \\ S_1S_2(C_6S_4 + C_4C_5S_6) - (C_1S_3 + C_2C_3S_1)(C_4C_6 - C_5S_4S_6) \\ -(S_1S_3 + C_1C_2C_3)(C_4C_6 - C_5S_4S_6) - C_1S_2(C_6S_4 + C_4C_5S_6) \\ 0 & 0 \\ S_4S_5(C_1S_3 + C_2C_3S_1) + C_4S_1S_2S_5 \\ S_4S_5(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2S_5 \\ 0 & 0 \\ S_1S_2(L_3S_4 + L_4S_4S_6 + L_4C_4C_5C_6) - (C_1S_3 + C_2C_3S_1)(L_3C_4 + L_4C_4S_6 - L_4C_5C_6S_4) \\ -(S_1S_3 - C_1C_2C_3)(L_2C_4 + L_4C_4S_6 - L_4C_5C_6S_4) - C_1S_2(L_3S_4 + L_4S_4S_6 + L_4C_4C_5C_6) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{551} = \frac{\partial \mathbf{U}_{55}}{\partial \theta_1} = & \begin{pmatrix} S_5C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4 + C_5C_1C_3 - C_2S_1S_3 \\ S_4C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4 + C_5C_3S_1 + C_1C_2S_3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ S_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3) - C_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) & 0 \\ S_5(C_3S_1 - C_2C_2S_3) - C_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{651} = \frac{\partial \mathbf{U}_{65}}{\partial \theta_1} = & \begin{pmatrix} C_6S_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) + C_5C_6(C_1C_3 - C_2S_1S_3) \\ C_6S_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) + C_5C_6(C_3S_1 + C_1C_2S_3) \\ 0 & 0 \\ -S_5S_6(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) - C_5S_6(C_1C_3 - C_2S_1S_3) \\ -S_5S_6(C_4(C_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) - C_5S_6(C_1S_1 + C_1C_2S_3) \\ 0 & 0 \\ S_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3) - C_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) \\ S_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3) - C_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) \\ 0 & 0 \\ L_4C_6S_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) + L_4C_5C_6(C_1C_3 - C_2S_1S_3) \\ L_4C_6S_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) + L_4C_5C_6(C_3S_1 + C_1C_2S_3) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{661} = \frac{\partial \mathbf{U}_{66}}{\partial \theta_1} = & \begin{pmatrix} S_6(C_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) - S_5(C_1C_3 - \\ S_6(C_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) - S_5(C_3S_1 + \\ 0 \\ 0 \\ -C_2S_1S_3)) - C_6(S_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) + C_4S_1S_2) & S_6(S_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) + C_4S_1S_2) + \\ +C_1C_2S_3)) - C_6(S_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2) & S_6(S_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2) + \\ \\ \\ +C_6(C_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) - S_5(C_1C_3 - \\ +C_6(C_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1S_2S_4) - S_5(C_3S_1 + \\ 0 \\ 0 \\ -C_2S_1S_3)) - L_4C_6(S_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) + C_4S_1S_2) \\ -C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) - S_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3)) - L_4C_6(S_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{212} = \frac{\partial \mathbf{U}_{21}}{\partial \theta_2} = & \begin{bmatrix} S_1S_2 & 0 & C_2S_1 & 0 \\ -C_1S_2 & 0 & -C_1C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{U}_{312} = \frac{\partial \mathbf{U}_{31}}{\partial \theta_2} = & \begin{bmatrix} C_3S_1S_2 & C_2S_1 & S_1S_2S_3 & -L_2C_2S_1 \\ -C_1C_3S_2 & -C_1C_2 & -C_3S_2S_3 & L_2C_1C_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{U}_{412} = \frac{\partial \mathbf{U}_{41}}{\partial \theta_2} = & \begin{bmatrix} S_1(C_2S_4 + C_3C_4S_2) & S_1S_2S_3 & S_1(C_2C_4 - C_3S_2S_4) & -L_2C_2S_1 \\ -C_1(C_2S_4 + C_3C_4S_2) & -C_1S_2S_3 & C_1(C_2C_4 - C_3S_2S_4) & L_2C_1C_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{U}_{512} = \frac{\partial \mathbf{U}_{51}}{\partial \theta_2} = & \begin{pmatrix} S_1(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) & -S_1(C_2C_4 - C_3S_2S_4) \\ -C_1(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) & C_1(C_2C_4 - C_3S_2S_4) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ S_1(S_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) - C_5S_2S_3) & -S_1(L_3(C_2C_4 - C_3S_2S_4) + L_2C_2) \\ -C_1(S_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) - C_5S_2S_3) & C_1(L_3(C_2C_4 - C_3S_2S_4) + L_2C_2) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{612} = \frac{\partial \mathbf{U}_{61}}{\partial \theta_2} = & \begin{pmatrix} S_1(C_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) - S_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4)) \\ -C_1(C_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) - S_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4)) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} -S_1(S_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) + C_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4)) & S_1(S_5(C_2S_4 + \\ C_1(S_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) + C_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4)) & -C_1(S_5(C_2S_4 + \\ 0 & \\ 0 & \\ +C_3C_4S_2) - C_5S_2S_3) & -S_1(L_3(C_2C_4 - C_3S_2S_4) + L_2C_2 + L_4S_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4) - \\ +C_3C_4S_2) - C_5S_2S_3) & C_1(L_3(C_2C_4 - C_3S_2S_4) + L_2C_2 + L_4S_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4) - \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -L_4C_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5)) & \\ -L_4C_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5)) & \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{222} = \frac{\partial \mathbf{U}_{22}}{\partial \theta_2} = & \begin{bmatrix} -C_1C_2 & 0 & C_1S_2 & 0 \\ -C_2S_1 & 0 & S_1S_2 & 0 \\ -S_2 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{U}_{322} = \frac{\partial \mathbf{U}_{32}}{\partial \theta_2} = & \begin{bmatrix} -C_1C_2C_3 & C_1S_2 & -C_1C_2S_3 & -L_2C_1S_2 \\ -C_2C_3S_1 & S_1S_2 & -C_2S_1S_3 & -L_2S_1S_2 \\ -C_3S_2 & -C_2 & -S_2S_3 & L_2C_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{U}_{422} = & \begin{bmatrix} C_1(S_2S_4 - C_2C_3C_4) & -C_1C_2S_3 & -C_1(C_4S_2 + C_2C_3S_4) & -L_2C_1S_2 \\ S_1(S_2S_4 - C_2C_3C_4) & -C_2S_1S_3 & -S_1(C_4S_2 + C_2C_3S_4) & -L_2S_1S_2 \\ -C_2S_4 - C_3C_4S_2 & -S_2S_3 & C_2C_4 - C_3S_2S_4 & L_2C_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{U}_{522} = \frac{\partial \mathbf{U}_{52}}{\partial \theta_2} = & \begin{pmatrix} C_1(C_5(S_2S_4 - C_2C_3C_4) - C_2S_3S_5) & -C_1(C_4S_2 + C_2C_3S_4) \\ S_1(C_5(S_2S_4 - C_2C_3C_4) - C_2S_3S_5) & -S_1(C_4S_2 + C_2C_3S_4) \\ -C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) - S_2S_3S_5 & C_2C_4 - C_3S_2S_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} C_1(S_5(S_2S_4 - C_2C_3C_4) + C_2C_5S_3) & -C_1(L_3(C_4S_2 + C_2C_3S_4) + L_2S_2) \\ S_1(S_5(S_2S_4 - C_2C_3C_4) + C_2C_5S_3) & -S_1(L_3(C_4S_2 + C_2C_3S_4) + L_2S_2) \\ C_5S_2S_3 - S_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) & L_3(C_2C_4 - C_3S_2S_4) + L_2C_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{622} = \frac{\partial \mathbf{U}_{62}}{\partial \theta_2} = & \begin{pmatrix} C_1(C_6(C_5(S_2S_4 - C_2C_3C_4) - C_2S_3S_5) - S_6(C_4S_2 + C_2C_3S_4)) \\ S_1(C_6(C_5(S_2S_4 - C_2C_3C_4) - C_2S_3S_5) - S_6(C_4S_2 + C_2C_3S_4)) \\ S_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4) - C_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} -C_1(S_6(C_5(S_2S_4 - C_2C_3C_4) - C_2S_3S_5) + C_6(C_4S_2 + C_2C_3S_4)) & C_1(S_5(S_2S_4 - \\ -S_1(S_6(C_5(S_2S_4 - C_2C_3C_4) - C_2S_3S_5) + C_6(C_4S_2 + C_2C_3S_4)) & S_1(S_5(S_2S_4 - \\ S_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) + C_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4)) & C_5S_2S_3 - \\ 0 & 0 \\ -C_2C_3C_4) + C_2C_5S_3) & -C_1(L_3(C_4S_2 + C_2C_3S_4) + L_2S_2 + L_4S_6(C_4S_2 + C_2C_3S_4) - \\ -C_2C_3C_4) + C_2C_5S_3) & -S_1(L_3(C_4S_2 + C_2C_3S_4) + L_2S_2 + L_4S_6(C_4S_2 + C_2C_3S_4) - \\ -S_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) & L_3(C_2C_4 - C_3S_2S_4) + L_2C_2 + L_4S_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4) - \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} -L_4 C_6 (C_5 (S_2 S_4 - C_2 C_3 C_4) - C_2 S_3 S_5) \\ -L_4 C_6 (C_5 (S_2 S_4 - C_2 C_3 C_4) - C_2 S_3 S_5) \\ -L_4 C_6 (C_5 (C_2 C_4 + C_3 C_4 S_2) + S_2 S_3 S_5) \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{332} = \frac{\partial \mathbf{U}_{33}}{\partial \theta_2} &= \begin{bmatrix} C_1 S_2 S_3 & 0 & -C_1 C_3 S_2 & 0 \\ S_1 S_2 S_3 & 0 & -C_3 S_1 S_2 & 0 \\ -C_2 S_3 & 0 & C_2 C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{U}_{432} = \frac{\partial \mathbf{U}_{43}}{\partial \theta_2} &= \begin{bmatrix} C_1 C_4 S_2 S_3 & -C_1 C_3 S_2 & C_1 S_2 S_3 S_4 & 0 \\ C_4 S_1 S_2 S_3 & -C_3 S_1 S_2 & S_1 S_2 S_3 S_4 & 0 \\ -C_2 C_4 S_3 & C_2 C_3 & -C_2 S_3 S_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{U}_{532} = \frac{\partial \mathbf{U}_{53}}{\partial \theta_2} &= \begin{pmatrix} -C_1 S_2 (C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) & C_1 S_2 S_3 S_4 & C_1 S_2 (C_3 C_5 + C_4 S_3 S_5) \\ -S_1 S_2 (C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) & S_1 S_2 S_3 S_4 & S_1 S_2 (C_3 C_5 + C_4 S_3 S_5) \\ C_2 (C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) & -C_2 S_3 S_4 & -C_2 (C_3 C_5 + C_4 S_3 S_5) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} -L_3 C_1 S_2 S_3 S_4 \\ L_3 S_1 S_2 S_3 S_4 \\ -L_3 C_2 S_3 S_4 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{632} = \frac{\partial \mathbf{U}_{63}}{\partial \theta_2} &= \begin{pmatrix} -C_1 S_2 (C_6 (C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) - S_3 S_4 S_6) & C_1 S_2 (S_6 (C_3 S_5 - \\ -S_1 S_2 (C_6 (C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) - S_3 S_4 S_6) & S_1 S_2 (S_6 (C_3 S_5 - \\ C_2 (C_6 (C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) - S_3 S_4 S_6) & -C_2 (S_6 (C_3 S_5 - \\ 0 & 0 \\ -C_4 C_5 S_3) + C_6 S_3 S_4 & C_1 S_2 (C_3 C_5 + C_4 S_3 S_5) & C_1 S_2 (L_3 S_3 S_4 - L_4 C_6 (C_3 S_5 - \\ -C_4 C_5 S_3) + C_6 S_3 S_4 & S_1 S_2 (C_3 C_5 + C_4 S_3 S_5) & S_1 S_2 (L_3 S_3 S_5 - L_4 C_6 (C_3 S_5 - \\ -C_4 C_5 S_3) + C_6 S_3 S_4 & -C_2 (C_3 C_5 + C_4 S_3 S_5) & -C_2 (L_3 S_3 S_4 - L_4 C_6 (C_3 S_5 - \\ 0 & 0 \\ -C_4 C_5 S_3) + L_4 S_3 S_4 S_6 \\ -C_4 C_5 S_3) + L_4 S_3 S_4 S_6 \\ -C_4 C_5 S_3) + L_4 S_3 S_4 S_6 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{442} = \frac{\partial \mathbf{U}_{44}}{\partial \theta_2} &= \begin{bmatrix} C_1 C_3 S_2 S_4 - C_1 C_2 C_4 & 0 & -C_1 C_2 S_4 - C_1 C_3 C_4 S_2 & 0 \\ C_3 S_1 S_2 S_4 - C_2 C_4 S_1 & 0 & -C_2 S_1 S_4 - C_3 C_4 S_1 S_2 & 0 \\ -C_4 S_2 - C_2 C_3 S_4 & 0 & C_2 C_3 C_4 - S_2 S_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{U}_{542} = \frac{\partial \mathbf{U}_{54}}{\partial \theta_2} &= \begin{pmatrix} C_1 C_3 C_5 S_2 S_4 - C_1 C_2 C_4 C_5 & -C_1 C_2 S_4 - C_1 C_3 C_4 S_2 \\ C_3 C_5 S_1 S_2 S_4 - C_2 C_4 C_5 S_1 & -C_2 S_1 S_4 - C_3 C_4 S_1 S_2 \\ -C_4 C_5 S_2 - C_2 C_3 C_5 S_4 & C_2 C_3 C_4 - S_2 S_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} C_1 C_3 S_2 S_4 S_5 - C_1 C_2 C_4 S_5 & -L_3 C_1 C_2 S_4 - L_3 C_1 C_3 C_4 S_2 \\ C_3 S_1 S_2 S_4 S_5 - C_2 C_4 S_1 S_5 & -L_3 C_2 S_1 S_4 - L_3 C_3 C_4 S_1 S_2 \\ -C_4 S_2 S_5 - C_2 C_3 S_4 S_5 & L_3 C_2 C_3 C_4 - L_3 S_2 S_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{642} = \frac{\partial \mathbf{U}_{64}}{\partial \theta_2} = & \begin{pmatrix} -C_1 C_2 (S_4 S_6 + C_4 C_5 C_6) - C_1 C_3 S_2 (C_4 S_6 - C_5 C_6 S_4) \\ -C_2 S_1 (S_4 S_6 + C_4 C_5 C_6) - C_3 S_1 S_2 (C_4 S_6 - C_5 C_6 S_4) \\ C_2 C_3 (C_4 S_6 - C_5 C_6 S_4) - S_2 (S_4 S_6 + C_4 C_5 C_6) \\ 0 \\ -C_1 C_2 (C_6 S_4 - C_4 C_5 S_6) - C_1 C_3 S_2 (C_4 C_6 + C_5 S_4 S_6) & C_1 C_3 S_2 S_4 S_5 - C_1 C_2 C_4 S_5 \\ -C_2 S_1 (C_6 S_4 - C_4 C_5 S_6) - C_3 S_1 S_2 (C_4 C_6 + C_5 S_4 S_6) & C_3 S_1 S_2 S_4 S_5 - C_2 C_4 S_1 S_5 \\ C_2 C_3 (C_4 C_6 + C_5 S_4 S_6) - S_2 (C_6 S_4 - C_4 C_5 S_6) & -C_4 S_2 S_5 - C_2 C_3 S_4 S_5 \\ 0 \\ -C_1 C_2 (L_3 S_4 + L_4 S_4 S_6 + L_4 C_4 C_5 C_6) - C_1 C_3 S_2 (L_3 C_4 + L_4 C_4 S_6 - L_4 C_5 C_6 S_4) \\ -C_2 S_1 (L_3 S_4 + L_4 S_4 S_6 + L_4 C_4 C_5 C_6) - C_3 S_1 S_2 (L_3 C_4 + L_4 C_4 S_6 - L_4 C_5 C_6 S_4) \\ C_2 C_3 (L_3 C_4 + L_4 C_4 S_6 - L_4 C_5 C_6 S_4) - S_2 (L_3 S_4 + L_4 S_4 S_6 + L_4 C_4 C_5 C_6) \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{552} = \frac{\partial \mathbf{U}_{55}}{\partial \theta_2} = & \begin{pmatrix} C_1 S_5 (C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) - C_1 C_5 S_2 S_3 & 0 \\ S_1 S_5 (C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) - C_5 S_1 S_2 S_3 & 0 \\ S_5 (S_2 S_4 - C_2 C_3 C_4) + C_2 C_5 S_3 & 0 \\ 0 & 0 \\ -C_1 C_5 (C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) - C_1 S_2 S_3 S_5 & 0 \\ -C_5 S_1 (C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) - S_1 S_2 S_3 S_5 & 0 \\ C_2 S_3 S_5 - C_5 (S_2 S_4 - C_2 C_3 C_4) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{652} = \frac{\partial \mathbf{U}_{65}}{\partial \theta_2} = & \begin{pmatrix} C_1 C_6 S_5 (C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) - C_1 C_5 C_6 S_2 S_3 & C_1 C_5 S_2 S_3 S_6 - \\ C_6 S_1 S_5 (C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) - C_5 C_6 S_1 S_2 S_3 & C_5 S_1 S_2 S_3 S_6 - \\ C_6 S_5 (S_2 S_4 - C_2 C_3 C_4) + C_2 C_5 C_6 S_3 & -S_5 S_6 (S_2 S_4 \\ 0 \\ -C_1 S_5 S_6 (C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) & -C_1 C_5 (C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) - C_1 S_2 S_3 S_5 & L_4 C_1 C_6 S_5 (C_2 S_4 + \\ -S_1 S_5 S_6 (C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) & -C_5 S_1 (C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) - S_1 S_2 S_3 S_5 & L_4 C_6 S_1 S_5 (C_2 S_4 + \\ -C_2 C_3 C_4) - C_2 C_3 S_3 S_6 & C_2 S_3 S_5 - C_5 (S_2 S_4 - C_2 C_3 C_4) & L_4 C_6 S_5 (S_2 S_4 - \\ 0 \\ +C_3 C_4 S_2) - L_4 C_1 C_5 C_6 S_2 S_3 \\ +C_3 C_4 S_2) - L_4 C_5 C_6 S_1 S_2 S_3 \\ -C_2 C_3 C_4) + L_4 C_2 C_5 C_6 S_3 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{662} = \frac{\partial \mathbf{U}_{66}}{\partial \theta_2} = & \begin{pmatrix} C_1 S_6 (C_5 (C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) + S_2 S_3 S_5) + C_1 C_6 (C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4) \\ S_1 S_6 (C_5 (C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) + S_2 S_3 S_5) + C_6 S_1 (C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4) \\ S_6 (C_5 (S_2 S_4 - C_2 C_3 C_4) - C_2 S_3 S_5) + C_6 (C_4 S_2 + C_2 C_3 S_4) \\ 0 \\ C_1 C_6 (C_5 (C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) + S_2 S_3 S_5) - C_1 S_6 (C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4) & 0 & L_4 S_1 S_6 (C_5 (C_2 S_4 + \\ C_6 S_1 (C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) + S_2 S_3 S_5) - S_1 S_6 (C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4) & 0 & L_4 S_1 S_6 (C_5 (C_2 S_4 + \\ C_6 (C_5 (S_2 S_4 - C_2 C_3 C_4) - C_2 S_3 S_5) - S_6 (C_4 S_2 + C_2 C_3 S_4) & 0 & L_4 C_6 (C_4 S_2 + \\ 0 & 0 \\ +C_3 C_4 S_2) + S_2 S_3 S_5) + L_4 C_1 C_6 (C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4) \\ +C_3 C_4 S_2) + S_2 S_3 S_5) + L_4 C_6 S_1 (C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4) \\ +C_2 C_3 S_4) + L_4 S_6 (C_5 (S_2 S_4 - C_2 C_3 C_4) - C_2 S_3 S_5) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{323} &= \frac{\partial \mathbf{U}_{32}}{\partial \theta_3} = \begin{bmatrix} C_1 S_2 S_3 & 0 & -C_1 C_3 S_2 & 0 \\ S_1 S_2 S_3 & 0 & -C_3 S_1 S_2 & 0 \\ -C_2 S_3 & 0 & C_2 C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{U}_{313} &= \frac{\partial \mathbf{U}_{31}}{\partial \theta_3} = \begin{bmatrix} C_2 S_1 S_3 - C_1 C_3 & 0 & -C_1 S_3 - C_2 C_3 S_1 & 0 \\ C_3 S_1 - C_1 C_2 S_3 & 0 & C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{U}_{413} &= \frac{\partial \mathbf{U}_{41}}{\partial \theta_3} = \begin{pmatrix} C_2 C_4 S_1 S_3 - C_1 C_3 C_4 & -C_1 S_3 - C_2 C_3 S_1 & C_2 S_1 S_3 S_4 - C_1 C_3 S_4 & 0 \\ -C_3 C_4 S_1 - C_1 C_2 C_4 S_3 & C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3 & -C_3 S_1 S_4 - C_1 C_2 S_3 S_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{513} &= \frac{\partial \mathbf{U}_{51}}{\partial \theta_3} = \begin{pmatrix} -C_1(S_3 S_5 + C_3 C_4 C_5) - C_2 S_1(C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) & C_2 S_1 S_3 S_4 - C_1 C_3 S_4 & 0 \\ C_1 C_2(C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) - S_1(S_3 S_5 + C_3 C_4 C_5) & -C_3 S_1 S_4 - C_1 C_2 S_3 S_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -C_1 C_3 S_4 & C_1(C_5 S_3 - C_3 C_4 S_5) + C_2 S_1(C_3 C_5 + C_4 S_3 S_5) & L_3 C_2 S_1 S_3 S_4 - L_3 C_1 C_3 S_4 \\ -C_1 C_2 S_3 S_4 & S_1(C_5 S_3 - C_3 C_4 S_5) - C_1 C_2(C_3 C_5 + C_4 S_3 S_5) & -L_3 C_3 S_1 S_4 - L_3 C_1 C_2 S_3 S_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{613} &= \frac{\partial \mathbf{U}_{61}}{\partial \theta_3} = \begin{pmatrix} -C_1(C_6(S_3 S_5 + C_3 C_4 C_5) + C_3 S_4 S_6) - C_2 S_1(C_6(C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) - C_1 C_2(C_6(C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) - C_3 S_4 S_6) - S_1(C_6(S_3 S_5 + C_3 C_4 C_5) + \\ 0 & 0 & 0 \\ -S_3 S_4 S_6) & C_1(S_6(S_3 S_5 + C_3 C_4 C_5) - C_3 C_6 S_4) + C_2 S_1(S_6(C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) + C_6 S_3 S_4) \\ + C_3 S_1 S_6) & C_1(S_6(S_3 S_5 + C_3 C_4 C_5) - C_3 C_6 S_4) - C_1 C_2(S_6(C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) + C_6 S_3 S_4) \\ 0 & 0 & 0 \\ C_1(C_5 S_3 - C_3 C_4 S_5) + C_2 S_1(C_3 C_5 + C_4 S_3 S_5) & C_2 S_1(L_3 S_3 S_4 - L_4 C_6(C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) + \\ S_1(C_5 S_3 - C_3 C_4 S_5) - C_1 C_2(C_3 C_5 + C_4 S_3 S_5) & -S_1(L_4 C_6(S_3 S_5 + C_3 C_4 C_5) + L_3 S_3 S_4 + \\ 0 & 0 & 0 \\ + L_4 S_3 S_4 S_6) - C_1(L_4 S_6(S_3 S_5 + C_3 C_4 C_5 + L_3 C_3 S_4 + L_4 C_3 S_4 S_6) \\ + L_4 S_3 S_4 S_6) - C_1 C_2(L_3 S_3 S_4 - L_4 C_6 C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) + L_4 S_3 S_4 S_6) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{423} &= \frac{\partial \mathbf{U}_{42}}{\partial \theta_3} = \begin{bmatrix} C_1 C_4 S_2 S_3 & -C_1 C_3 S_2 & C_1 S_2 S_3 S_4 & 0 \\ C_4 S_1 S_2 S_3 & -C_3 S_1 S_2 & S_1 S_2 S_3 S_4 & 0 \\ -C_2 C_4 S_3 & C_2 C_3 & -C_2 S_3 S_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{U}_{523} &= \frac{\partial \mathbf{U}_{52}}{\partial \theta_3} = \begin{pmatrix} -C_1 S_2(C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) & C_1 S_2 S_3 S_4 C_1 S_2(C_3 C_4 + C_4 S_3 S_5) \\ -S_1 S_2(C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) & S_1 S_2 S_3 S_4 S_1 S_2(C_3 C_5 + C_4 S_3 S_5) \\ C_2(C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) & -C_2 S_3 S_4 - C_2(C_3 C_4 + C_4 S_3 S_5) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} L_3 C_1 S_2 S_3 S_4 \\ L_3 S_1 S_2 S_3 S_4 \\ -L_3 C_2 S_3 S_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{623} = \frac{\partial \mathbf{U}_{62}}{\partial \theta_3} = \begin{pmatrix} -C_1 S_2 (C_6 (C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) - S_3 S_4 S_6) & C_1 S_2 (S_6 (C_3 S_5 - \\ -S_1 S_2 (C_6 (C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) - S_3 S_4 S_6) & S_1 S_2 (S_6 (C_3 S_5 - \\ C_2 (C_6 (C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) - S_3 S_4 S_6) & -C_2 (S_6 (C_3 S_5 - \\ 0 & \\ -C_4 C_5 S_3) + C_6 S_3 S_4 & C_1 S_2 (C_3 C_5 + C_4 S_3 S_5) & C_1 S_2 (L_3 S_3 S_4 - L_4 C_6 (C_3 S_5 - \\ -C_4 C_5 S_3) + C_6 S_3 S_4 & S_1 S_2 (C_3 C_5 + C_4 S_3 S_5) & S_1 S_2 (L_3 S_3 S_4 - L_4 C_6 (C_3 S_5 - \\ -C_4 C_5 S_3) + C_6 S_3 S_4 & -C_2 (C_3 C_5 + C_4 S_3 S_5) & -C_2 (L_3 S_3 S_4 - L_4 C_6 (C_3 S_5 - \\ 0 & 0 & \\ -C_4 C_5 S_3) + L_4 S_3 S_4 S_6 \\ -C_4 C_5 S_3) + L_4 S_3 S_4 S_6 \\ -C_4 C_5 S_3) + L_4 S_3 S_4 S_6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{333} = \frac{\partial \mathbf{U}_{33}}{\partial \theta_3} = \begin{bmatrix} S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3 & 0 & -C_3 S_1 - C_1 C_2 S_3 & 0 \\ -C_1 S_3 - C_2 C_3 S_1 & 0 & C_1 C_3 - C_2 S_1 S_3 & 0 \\ -C_3 S_2 & 0 & -S_2 S_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{433} = \begin{bmatrix} C_4 S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3 C_4 & -C_3 S_1 - C_1 C_2 S_3 & S_1 S_3 S_4 - C_1 C_2 C_3 S_4 & 0 \\ -C_1 C_4 S_3 - S_2 C_3 C_4 S_1 & C_1 C_3 - C_2 S_1 S_3 & -C_1 S_3 S_4 - C_2 C_3 S_1 S_4 & 0 \\ -C_3 C_4 S_2 & -S_2 S_3 & -C_3 S_2 S_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{533} = \frac{\partial \mathbf{U}_{53}}{\partial \theta_3} = \begin{pmatrix} -S_1 (C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) - C_1 C_2 (S_3 S_5 + C_3 C_4 C_5) & S_1 S_3 S_4 - \\ C_1 (C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) - C_2 S_1 (S_3 S_5 + C_3 C_4 C_5) & C_1 S_3 S_4 - \\ -S_2 (S_3 S_5 + C_3 C_4 C_5) & C_1 S_3 S_4 - \\ 0 & \\ -C_1 C_2 C_3 S_4 & S_1 (C_3 C_5 + C_4 S_3 S_5) + C_1 C_2 (C_5 S_3 - C_3 C_4 S_5) & L_3 S_1 S_3 S_4 - L_3 C_1 C_2 C_3 S_4 \\ -C_2 C_3 S_1 S_4 & C_2 S_1 (C_5 S_3 - C_3 C_4 S_5) - C_1 (C_3 C_5 + C_4 S_3 S_5) & -L_3 C_1 S_3 S_4 - L_3 C_2 C_3 S_1 S_4 \\ -C_3 S_2 S_4 & S_2 (C_5 S_3 - C_3 C_4 S_5) & -L_3 C_3 S_2 S_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{633} = \frac{\partial \mathbf{U}_{63}}{\partial \theta_3} = \begin{pmatrix} -S_1 (C_6 (C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) - S_3 S_4 S_6) - C_1 C_2 (C_6 (S_3 S_5 + \\ C_1 (C_6 (C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) - S_3 S_4 S_6) - C_2 S_1 (C_6 (S_3 S_5 + \\ -S_2 (C_6 (S_3 S_5 + C_3 C_4 C_5) + C_3 S_4 S_6 \\ 0 \\ +C_3 C_4 C_5) + C_3 S_4 S_6) & S_1 (S_6 (C_3 S_5 - C_4 C_5 S_3) + C_6 S_3 S_4) + C_3 C_2 (S_6 (S_3 S_5 + \\ +C_3 C_4 C_5) + C_3 S_4 S_6) & C_2 S_1 (S_6 (S_3 S_5 + C_3 C_4 C_5) - C_3 C_6 S_5) - C_3 C_6 S_4) - C_1 (S_6 (C_3 S_5 - \\ S_2 (S_6 (S_3 S_5 + C_3 C_4 C_5) - C_3 C_6 S_4) \\ 0 \\ +C_3 C_4 C_5) - C_3 C_6 S_4) & S_1 (C_3 C_5 + C_4 S_3 S_5) + C_1 C_2 (C_5 S_3 - C_3 C_4 S_5) & S_1 (L_3 S_3 S_4 - \\ -C_4 C_5 S_3) + C_6 S_3 S_4) & C_2 S_1 (C_5 S_3 - C_3 C_4 S_5) - C_1 (C_3 C_5 + C_4 S_3 S_5) & -C_1 (L_3 S_3 S_4 - \\ S_2 (C_5 S_3 - C_3 C_4 S_5) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& -L_4C_6(C_3S_5 - C_4C_5S_3) + L_4S_3S_4S_6) - C_1C_2(L_4C_6(S_3S_5 + C_3C_4C_5) + L_3C_3S_4 + \\
& -L_4C_6(C_3S_5 - C_4C_5S_3) + L_4S_3S_4S_6) - C_2C_1(L_4C_6(S_3S_5 + C_3C_4C_5) + L_3C_3S_4 + \\
& -S_1(L_4C_6(S_3S_5 + C_3C_4C_5) + L_3C_3S_4S_6) \\
& 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +L_4C_3S_4S_6) \\
& +L_4C_3S_4S_6)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{U}_{443} = \frac{\partial \mathbf{U}_{44}}{\partial \theta_3} = \begin{bmatrix} S_4(C_3S_1 + C_1C_2S_3) & 0 & -C_4(C_3S_1 + C_1C_2S_3) & 0 \\ -S_4(C_1C_3 - C_2S_1S_3) & 0 & C_4(C_1C_3 - C_2S_1S_3) & 0 \\ S_2S_3S_4 & 0 & -C_4S_2S_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{543} = \begin{pmatrix} S_5S_4(C_3S_1 + C_1C_2S_3) & -C_4(C_3S_1 + C_1C_2S_3) & S_4S_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3) \\ -S_5S_4(C_1C_3 - C_2S_1S_3) & C_4(C_1C_3 - C_2S_1S_3) & -S_4S_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3) \\ S_5S_2S_3S_4 & -C_4S_2S_3 & S_2S_3S_4S_5 - C_2S_1S_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& -L_3C_4(C_3S_1 + C_1C_2S_3) \\
& L_3C_4(C_1C_3 - C_2S_1S_3) \\
& -L_3C_4S_2S_3 \\
& 0
\end{aligned}$$

$$\mathbf{U}_{643} = \begin{pmatrix} -(C_3S_1 + C_1C_2S_3)(C_4S_6 - C_5C_6S_4) & -(C_3S_1 + C_1C_2S_3)(C_4C_6 + C_5S_4S_6) \\ (C_1C_3 - C_2S_1S_3)(C_4S_6 - C_5C_6S_4) & (C_1C_3 - C_2S_1S_3)(C_4C_6 + C_5S_4S_6) \\ -S_2S_3(C_4S_6 - C_5C_6S_4) & -S_2S_3(C_4C_6 + C_5S_4S_6) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& S_4S_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3) & -(C_3S_1 + C_1C_2S_3)(L_3C_4 + L_4C_4S_6 - L_4C_5C_6S_4) \\
& -S_4S_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3) & (C_1C_3 - C_2S_1S_3)(L_3C_4 + L_4C_4S_6 - L_4C_5C_6S_4) \\
& S_2S_3S_4S_5 & -S_2S_3(L_3C_4 + L_4C_4S_6 - L_4C_5C_6S_4) \\
& 0 & 0
\end{aligned}$$

$$\mathbf{U}_{553} = \frac{\partial \mathbf{U}_{55}}{\partial \theta_3} = \begin{pmatrix} S_5(C_3C_4S_1 + C_1C_2C_4S_3) - C_5(S_1S_3 - C_1C_2C_3) & 0 \\ C_5(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_5(C_1C_3C_4 - C_2C_4S_1S_3) & 0 \\ C_3C_5S_2 - C_4S_2S_3S_5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& -C_5(C_3C_4S_1 + C_1C_2C_4S_3) - S_5(S_1S_3 - C_1C_2C_3) & 0 \\
& C_5(C_1C_3C_4 - C_2C_4S_1S_3) + S_5(C_1S_3 + C_2C_3S_1) & 0 \\
& C_3S_2S_5 - C_4C_5S_2S_3 & 0 \\
& 0 & 0
\end{aligned}$$

$$\mathbf{U}_{653} = \frac{\partial \mathbf{U}_{65}}{\partial \theta_3} = \begin{pmatrix} C_6S_5(C_3C_4S_1 + C_1C_2C_4S_3) - C_5C_6(S_1S_3 - C_1C_2C_3) \\ C_5C_6(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - C_6S_5(C_1C_3C_4 - C_2C_4S_1S_3) \\ C_3C_5C_6S_2 + C_4C_6S_2S_3S_5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& C_5S_6(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - S_5S_6(C_3C_4S_1 + C_1C_2C_4S_3) & -C_5(C_3C_4S_1 + C_1C_2C_4S_3) - \\
& S_5S_6(C_1C_3C_4 - C_2C_4S_1S_3) - C_5S_6(C_1S_3 + C_2C_3S_1) & -C_5(C_1C_3C_4 - C_2C_4S_1S_3) + \\
& -C_3C_5S_2S_6 - C_4S_2S_3S_5S_6 & C_3(S_2S_5 - C_4C_5S_2S_3) \\
& 0 & 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} -S_5(S_1S_3 - C_1C_2C_3) & L_4C_6S_5(C_3C_4S_1 + C_1C_2C_4S_3) - L_4C_5C_6(S_1S_3 - C_1C_2C_3) \\ +S_5(C_1S_3 + C_2C_2S_1) & L_4C_5C_6(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - L_4C_6S_5(C_1C_3C_4 - C_2C_4S_1S_3) \\ & L_4C_3C_5C_6S_2 + L_4C_4C_6S_2S_3S_5 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{663} = \frac{\partial \mathbf{U}_{66}}{\partial \theta_3} = & \begin{pmatrix} 0 \\ S_6(S_1(S_3S_5 + C_3C_4C_5) - C_1C_2(C_3S_5 - C_4C_5S_3)) - C_6(C_3S_1S_4 + \\ C_6(C_1C_3S_4 - C_2S_1S_3S_4) - S_6(C_1(S_3S_5 + C_3C_4C_5) + C_2S_1(C_3S_5 - \\ -S_2S_6(C_3S_5 - C_4C_5S_3) - C_6S_2S_3S_4 \\ 0 \\ +C_1C_2S_3S_4) & S_6(C_3S_1S_4 + C_1C_2S_3S_4) + C_6(S_1(S_3S_5 + C_3C_4C_5) - C_1C_2(C_3S_5 - \\ -C_4C_5S_3)) & -S_6(C_1C_3S_4 - C_2S_1S_3S_4) - C_6(C_1(S_3S_5 + C_3C_4C_5) + C_2S_1(C_3S_5 - \\ S_2S_3S_4S_6 - C_6S_2(C_3S_5 - C_4C_5S_3) \\ 0 \\ -C_4C_5S_3)) \\ -C_4C_5S_3)) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} L_4S_6(S_1(S_3S_5 + C_3C_4C_5) - C_1C_2(C_3S_5 - C_4C_5S_3)) - L_4C_6(C_3S_1S_4 + C_1C_2S_3S_4) \\ L_4C_6(C_1C_3S_4 - C_2S_1S_3S_4) - L_4S_6(C_1(S_3S_5 + C_3C_4C_5) + C_2S_1(C_3S_5 - C_4C_5S_3)) \\ -L_4S_2C_6(C_3S_5 - C_4C_5S_3) - L_4C_6S_2S_3S_4 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{414} = & \begin{bmatrix} S_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) + C_4S_1S_2 & 0 & S_1S_2S_4 - C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) & 0 \\ S_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2 & 0 & -C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1S_2S_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{U}_{514} = & \begin{pmatrix} C_5S_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) + C_4C_5S_1S_2 & S_1S_2S_4 - C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) \\ C_5S_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1C_4C_5S_2 & C_4(C_1C_2C_3 - S_1S_3) - C_1S_2S_4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ S_4S_5(C_1S_3 + C_2C_3S_1) + C_4S_1S_2S_5 & L_3S_1S_2S_4 - L_3C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) \\ S_4S_5(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2S_5 & -L_3C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - L_3C_1S_2S_4 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{614} = \frac{\partial \mathbf{U}_{61}}{\partial \theta_4} = & \begin{pmatrix} 0 \\ S_1S_2(S_4S_6 + C_4C_5C_6) - (C_1S_3 + C_2C_3S_1)(C_4S_6 - C_5C_6S_4) \\ -(S_1S_3 - C_1C_2C_3)(C_4S_6 - C_5C_6S_4) - C_1S_2(S_4S_6 + C_4C_5C_6) \\ 0 \\ 0 \\ S_1S_2(C_6S_4 - C_4C_5S_6) - (C_1S_3 + C_2C_3S_1)(C_4C_6 + C_5S_4S_6) & S_4S_5(C_1S_3 + \\ -(S_1S_3 - C_1C_2C_3)(C_4C_6 + C_5S_4S_6) - C_1S_2(C_6S_4 - C_4C_5S_6) & S_4S_5(S_1S_3 - \\ 0 \\ +C_2C_3S_1) + C_4S_1S_2S_5 & S_1S_2(L_3S_4 + L_4S_4S_6 + L_4C_4C_5C_6) - (C_1S_3 + C_2C_3S_1) \\ -C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2S_5 & -(S_1S_3 - C_1C_2C_3)(L_3C_4 + L_4C_4S_6 - L_4C_5C_6S_4) - \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} (L_3 C_4 + L_4 C_4 S_6 - L_4 C_5 C_6 S_4) \\ -C_1 S_2 (L_3 S_4 + L_4 S_4 S_6 + L_4 C_4 C_5 C_6) \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{424} = \frac{\partial \mathbf{U}_{42}}{\theta_4} &= \begin{bmatrix} C_1 C_3 S_2 S_4 - C_1 C_2 C_4 & 0 & -C_1 C_2 S_4 - C_1 C_3 C_4 S_2 & 0 \\ C_3 S_1 S_2 S_4 - C_2 C_4 S_1 & 0 & -C_2 S_1 S_4 - C_3 C_4 S_1 S_2 & 0 \\ -C_4 S_2 - C_2 C_3 S_4 & 0 & C_2 C_3 C_4 - S_2 S_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{U}_{524} = \frac{\partial \mathbf{U}_{52}}{\theta_4} &= \begin{pmatrix} C_1 S_3 C_5 S_2 S_4 - C_1 C_2 C_4 C_5 & -C_1 C_2 S_4 - C_1 C_3 C_4 S_2 \\ C_3 C_5 S_1 S_2 S_4 - C_2 C_4 C_5 S_1 & -C_2 S_1 S_4 - C_3 C_4 S_1 S_2 \\ -C_4 C_5 S_2 - C_2 C_3 C_5 S_4 & C_2 C_3 C_4 - S_2 S_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} C_1 C_3 S_2 S_4 S_5 - C_1 C_2 C_4 S_5 & -L_3 C_1 C_2 S_4 - L_3 C_1 C_3 C_4 S_2 \\ C_3 S_1 S_2 S_4 S_5 - C_2 C_4 S_1 S_5 & -L_3 C_2 S_1 S_4 - L_3 C_3 C_4 S_1 S_2 \\ -C_4 S_2 S_5 - C_2 C_3 S_4 S_5 & L_3 C_2 C_3 C_4 - L_3 S_2 S_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{624} = \frac{\partial \mathbf{U}_{62}}{\theta_4} &= \begin{pmatrix} -C_1 C_2 (S_4 S_6 + C_4 C_5 C_6) - C_1 C_3 S_2 (C_4 S_6 - C_5 C_6 S_4) \\ -C_2 S_1 (S_4 S_6 + C_4 C_5 C_6) - C_3 S_1 S_2 (C_4 S_6 - C_5 C_6 S_4) \\ C_2 C_3 (C_4 S_6 - C_5 C_6 S_4) - S_2 (S_4 S_6 + C_4 C_5 C_6) \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} -C_1 C_2 (C_6 S_4 - C_4 C_5 S_6) - C_1 C_3 S_2 (C_4 C_6 + C_5 S_4 S_6) & C_1 C_3 S_2 S_4 S_5 - C_1 C_2 C_4 S_5 \\ -C_2 S_1 (C_6 S_4 - C_4 C_5 S_6) - C_3 S_1 S_2 (C_4 C_6 + C_5 S_4 S_6) & C_3 S_1 S_2 S_4 S_5 - C_2 C_3 S_1 S_5 \\ C_2 C_3 (C_4 C_6 + C_5 S_4 S_6) - S_2 (C_6 S_4 - C_4 C_5 S_6) & -C_4 S_2 S_5 - C_2 C_3 S_4 S_5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} -C_1 S_2 (L_3 S_4 - L_4 S_4 S_6 + L_4 C_4 C_5 C_6) - C_1 C_3 S_2 (L_3 C_4 + L_4 C_4 S_6 + L_4 C_5 C_6 S_4) \\ -C_2 S_1 (L_3 S_4 + L_4 S_4 S_6 + L_4 C_4 C_5 C_6) - C_3 S_1 S_2 (L_3 C_4 + L_4 C_4 S_6 + L_4 C_5 C_6 S_4) \\ C_2 C_3 (L_3 C_4 + L_4 C_4 S_6 - L_4 C_5 C_6 S_4) - S_2 (L_3 S_4 + L_4 S_4 S_6 + L_4 C_4 C_5 C_6) \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{534} = \frac{\partial \mathbf{U}_{53}}{\theta_4} &= \begin{pmatrix} C_5 S_4 (C_3 S_1 + C_1 C_2 S_3) & -C_4 (C_3 S_1 + C_1 C_2 S_3) & S_4 S_5 (C_3 S_1 + \\ -C_5 S_4 (C_1 C_3 - C_2 S_1 S_3) & C_4 (C_1 C_3 - C_2 S_1 S_3) & -S_4 S_5 (C_1 C_3 - \\ C_5 S_2 S_3 S_4 & -C_4 S_2 S_3 & S_2 S_3 S_4 S_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} +C_1 C_2 S_3) & -L_3 C_4 (C_3 S_1 + C_1 C_2 S_3) \\ -C_2 S_1 S_3) & L_3 C_4 (C_1 C_3 - C_2 S_1 S_3) \\ -L_3 C_4 S_2 S_3 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{634} = \frac{\partial \mathbf{U}_{63}}{\theta_4} &= \begin{pmatrix} (C_3 S_1 + C_1 C_2 S_3)(C_4 S_6 - C_5 C_6 S_4) & (C_3 S_1 + C_1 C_2 S_3)(C_4 C_6 + \\ (C_1 C_3 - C_2 S_1 S_3)(C_4 S_6 - C_5 C_6 S_4) & (C_1 C_3 - C_2 S_1 S_3)(C_4 C_6 + \\ -S_2 S_3 (C_4 S_6 - C_5 C_6 S_4) & S_2 S_3 (C_4 C_6 + C_5 S_4 S_6) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} +C_5 S_4 S_6) & S_4 S_5 (C_3 S_1 + C_1 C_2 S_3) & -(C_3 S_1 - C_1 C_2 S_3)(L_3 C_4 + L_4 C_4 S_6 - \\ +C_5 S_4 S_6) & S_4 S_5 (C_3 S_1 + C_1 C_2 S_3) & (C_1 C_3 - C_2 S_1 S_3)(L_3 C_4 + L_4 C_4 S_6 - \\ S_2 S_3 S_4 S_5 & -S_2 S_3 (L_3 C_4 + L_4 C_4 S_6 - L_4 C_5 C_6 S_4) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{array}{l} -L_4 C_5 C_6 S_4 \\ -L_4 C_5 C_6 S_4 \end{array} \right) \\
\mathbf{U}_{444} &= \begin{bmatrix} C_4(S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) + C_1 S_2 S_4 & 0 & S_4(S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) - C_1 C_4 S_2 & 0 \\ S_1 S_2 S_4 - C_4(C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) & 0 & -S_4(C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) - C_4 S_1 S_2 & 0 \\ -C_2 S_4 - C_3 C_4 S_2 & 0 & C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{U}_{544} &= \frac{\partial \mathbf{U}_{54}}{\partial \theta_4} = \begin{pmatrix} C_4 C_5(S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) + C_1 C_5 S_2 S_4 & S_4(S_1 S_3 - C_1 C_2 S_3) - \\ C_5 S_1 S_2 S_4 - C_4 C_5(C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) & -S_4(C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) - \\ -C_2 C_5 S_4 - C_3 C_4 C_5 S_2 & C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& \left. \begin{array}{l} -C_1 S_4 S_2 \quad C_4 S_5(S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) + C_1 S_2 S_4 S_5 \quad L_3 S_4(S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) - L_3 C_1 C_4 S_2 \\ -C_4 S_1 S_2 \quad S_1 S_2 S_4 S_5 - C_4 C_5(C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) \quad -L_3 S_4(C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) - L_3 C_4 S_1 S_2 \\ -C_2 S_4 S_5 - C_3 C_4 S_2 S_5 \quad L_3 C_2 C_4 - L_3 C_3 S_2 S_4 \end{array} \right) \\
\mathbf{U}_{644} &= \frac{\partial \mathbf{U}_{64}}{\partial \theta_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3)(S_4 S_6 + C_4 C_5 C_6) - C_1 S_2(C_4 S_6 - C_5 C_6 S_4) & 0 \\ -(C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1)(S_4 S_6 + C_4 C_5 C_6) - S_1 S_2(C_4 S_6 - C_5 C_6 S_4) & 0 \\ C_2(C_4 S_6 - C_5 C_6 S_4) - C_3 S_2(S_4 S_6 + C_4 C_5 C_6) & 0 \end{pmatrix} \\
& \left. \begin{array}{l} (S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3)(C_6 S_4 - C_4 C_5 S_6) - C_1 C_2(C_4 C_6 + C_5 S_4 S_6) \quad C_4 S_5(S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) + \\ -(C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1)(C_6 S_4 - C_4 C_5 S_6) - S_1 S_2(C_4 C_6 + C_5 S_4 S_6) \quad S_1 S_2 S_4 S_5 - C_4 S_5(C_1 S_3 + \\ C_2(C_4 C_6 - C_4 S_5 S_6) - C_3 S_2(C_6 S_4 + C_4 C_5 S_6) \quad -C_2 S_4 S_5 - C_3 C_4 S_2 S_5 \\ 0 & 0 \\ +C_1 S_2 S_4 S_5) \quad (S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3)(L_3 S_4 + L_4 S_4 S_6 + L_4 C_4 C_5 C_6) - C_1 S_2(L_3 C_4 + \\ +C_2 C_3 S_1) \quad -(C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1)(L_3 S_4 + L_4 S_4 S_6 + L_4 C_4 C_5 C_6) - S_1 S_2(L_3 C_4 + \\ C_2(L_3 C_4 + L_4 C_4 S_6 - L_4 C_5 C_6 S_4) - C_3 S_2(L_3 S_4 + L_4 S_4 S_6) \end{array} \right) \\
& \left. \begin{array}{l} +L_4 C_4 S_6 - L_4 C_5 C_6 S_4 \\ +L_4 C_4 S_6 - L_4 C_5 C_6 S_4 \\ +L_4 C_4 C_5 C_6 \end{array} \right) \\
\mathbf{U}_{554} &= \frac{\partial \mathbf{U}_{55}}{\partial \theta_4} = \begin{pmatrix} -S_5(S_4(S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) - C_1 S_4 S_2) & 0 \\ S_5(S_4(C_2 S_3 + C_2 C_3 S_1) + C_4 S_1 S_2) & 0 \\ -S_5(C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& \left. \begin{array}{l} C_5(S_4(S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) - C_1 C_4 S_2) \quad 0 \\ -C_5(S_4(C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) + C_4 S_1 S_2) \quad 0 \\ C_5(C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4) \quad 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \\
\mathbf{U}_{654} &= \frac{\partial \mathbf{U}_{65}}{\partial \theta_4} = \begin{pmatrix} -C_6 S_5(S_4(S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) - C_1 C_4 S_2) & S_5 S_6(S_4(S_1 S_3 - \\ C_6 S_5(S_4(C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) + C_3 S_1 S_2) & -S_5 S_6(S_4(C_1 S_3 + \\ -C_6 S_5(C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4) & S_5 S_6(C_2 C_4 - \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} -C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2) & C_5(S_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2 & -L_4C_6S_5(S_4(S_1S_3 - \\ +C_2C_3S_1) + C_4S_1S_2) & -C_5(S_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) + C_4S_1S_2 & L_4C_6S_5 - (S_4(C_1S_3 + \\ -C_3S_2S_4) & C_5(C_2C_4 - C_3S_2S_4) & -L_4C_6S_5(C_2C_4 - \\ 0 & 0 & \\ -C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2) & & \\ +C_2C_3S_1) + C_4S_1S_3 & & \\ -C_3S_2S_4) & & \\ 0 & & \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{664} = & \begin{pmatrix} -S_6(C_5S_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1C_4C_5S_2 - C_6(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + \\ S_6(C_5S_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) + C_4C_5S_1S_2 + C_6(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - \\ C_6(C_2S_4 + C_3C_4S_2) - S_6(C_2C_4C_5 - C_3C_5S_2S_4) \\ 0 \\ +C_1S_2S_4) & S_6(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) - C_6(C_5S_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3 - C_1C_4C_5S_2) \\ -S_1S_2S_4) & C_6(C_5S_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) + C_4C_5S_1S_2) - S_6(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) \\ -C_6(C_2C_4C_5 - C_3C_5S_2S_4) - S_6(C_2S_4 + C_3C_4S_2) \\ 0 \\ -L_4S_6(C_5S_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1C_4C_5S_2) - L_4C_6(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) \\ L_4S_6(C_5S_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) + C_4C_5S_1S_2) - L_4C_6(C_4(C_1S_3 - C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) \\ L_4C_6(C_2S_4 + C_3C_4S_2) - L_4S_6(C_2C_4C_5 - C_3C_5S_2S_4) \\ 0 \\ S_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) + C_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3) & 0 \\ S_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) + C_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ S_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3) - C_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) & 0 \\ S_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3) - C_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{515} = \frac{\partial \mathbf{U}_{51}}{\partial \theta_5} = & \begin{pmatrix} S_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) + C_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3) & 0 \\ S_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) + C_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ S_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3) - C_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) & 0 \\ S_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3) - C_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{615} = \frac{\partial \mathbf{U}_{61}}{\partial \theta_5} = & \begin{pmatrix} C_6S_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) + C_5C_6(C_1C_3 - C_2S_1S_3) \\ C_6S_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) + C_5C_6(C_3S_1 + C_1C_2S_3) \\ 0 \\ 0 \\ -S_5S_6(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) - C_5S_6(C_1C_3 - C_2S_1S_3) & S_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3) - \\ -S_5S_6(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) - C_5S_6(C_3S_1 + C_1C_2S_3) & S_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3) - \\ 0 & \\ 0 & \\ -C_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) & L_4C_6S_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) + \\ -C_5(C_4(C_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) & L_4C_6S_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) + \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ +L_4C_5C_6(C_1C_3 - C_2S_1S_3) \\ +L_4C_5C_6(C_3S_1 + C_5S_2S_3) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{525} &= \frac{\partial \mathbf{U}_{52}}{\partial \theta_5} = \begin{pmatrix} C_1 S_5 (C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) - C_1 S_5 S_2 S_3 & 0 \\ S_1 S_5 (C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) - C_5 S_1 S_2 S_3 & 0 \\ S_5 (S_2 S_4 - C_2 C_3 C_4) + C_2 C_5 S_3 & 0 \\ 0 & 0 \\ -C_1 C_5 (C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) - C_1 S_2 S_3 S_5 & 0 \\ -C_5 S_1 (C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) - S_1 S_2 S_3 S_5 & 0 \\ C_2 S_3 S_5 - C_5 (S_2 S_4 - C_2 C_3 C_4) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{625} &= \frac{\partial \mathbf{U}_{62}}{\partial \theta_5} = \begin{pmatrix} C_1 C_6 S_5 (C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) - C_1 C_5 C_6 S_2 S_3 & C_1 C_5 S_2 S_3 S_6 - \\ C_6 S_1 S_5 (C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) - C_5 C_6 S_1 S_2 S_3 & C_5 S_1 S_2 S_3 S_6 - \\ C_6 S_5 (S_2 S_4 - C_2 C_3 C_4) + C_2 C_5 C_6 S_3 & -S_5 S_6 (S_2 S_4 - \\ 0 & 0 \\ -C_1 S_5 S_6 (C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) & -C_1 C_5 (C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) - C_1 S_2 S_3 S_5 & L_4 C_1 C_6 S_5 (C_2 S_4 + \\ -S_1 S_5 S_6 (C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) & -C_5 S_1 (C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2) - S_1 S_2 S_3 S_5 & L_4 C_6 S_1 S_5 (C_2 S_4 + \\ -C_2 C_3 C_4) - C_2 C_5 S_3 S_6 & C_2 S_3 S_5 - C_5 (S_2 S_4 - C_2 C_3 C_4) & L_4 C_6 S_5 (S_2 S_4 - \\ 0 & 0 \\ +C_3 C_4 S_2) - L_4 C_1 C_5 C_6 S_2 S_3 & \\ +C_3 C_4 S_2) - L_4 C_5 C_6 S_1 S_2 S_3 & \\ -C_2 C_3 C_4) + L_4 C_2 S_5 S_6 S_3 & \\ 0 & \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{535} &= \frac{\partial \mathbf{U}_{53}}{\partial \theta_5} = \begin{pmatrix} S_5 (C_3 C_4 S_1 + C_1 C_2 C_4 S_3) - C_5 (S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) & 0 & -C_5 (C_3 C_4 S_1 + \\ C_5 (C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) - S_5 (C_1 C_3 C_4 - C_2 C_4 S_1 S_3) & 0 & C_5 (C_1 C_3 C_4 - \\ C_3 C_5 S_2 + C_4 S_2 S_3 S_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ +C_1 C_2 C_4 S_3) - S_5 (S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) & 0 \\ -C_2 C_4 S_1 S_3) + S_1 (C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) & 0 \\ C_3 S_2 S_5 - C_4 C_5 S_2 S_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{635} &= \frac{\partial \mathbf{U}_{63}}{\partial \theta_5} = \begin{pmatrix} C_6 S_5 (C_3 C_4 S_1 + C_1 C_2 C_4 S_3) - C_5 C_6 (S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) \\ C_5 C_6 (C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) - C_6 S_5 (C_1 C_3 C_4 - C_2 C_4 S_1 S_3) \\ C_3 C_5 C_6 S_2 + C_4 C_6 S_2 S_3 S_5 \\ 0 \\ C_5 S_6 (S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) - S_5 S_6 (C_3 C_4 S_1 + C_1 C_2 C_4 S_3) & -C_5 (C_3 C_4 S_1 + C_1 C_2 C_4 S_3) - \\ S_5 S_6 (C_1 C_3 C_4 - C_2 C_4 S_1 S_3) - C_5 S_6 (C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) & C_5 (C_1 C_3 C_4 - C_2 C_4 S_1 S_3) + \\ -C_3 C_5 S_2 S_6 - C_4 S_2 S_3 S_5 S_6 & C_3 S_2 S_5 - C_4 C_5 S_2 S_3 \\ 0 & 0 \\ -S_5 (S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) & L_4 C_6 S_5 (C_3 C_4 S_1 + C_1 C_2 C_4 S_3) - L_4 C_5 C_6 (S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) \\ +S_5 (C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) & L_4 C_5 C_6 (C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) - L_4 C_6 S_5 (C_1 C_3 C_4 - C_2 C_4 S_1 S_3) \\ L_4 C_3 C_5 C_6 S_2 + L_4 C_4 C_6 S_2 S_3 S_5 & \\ 0 & \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{545} &= \frac{\partial \mathbf{U}_{54}}{\partial \theta_5} = \begin{pmatrix} -S_5 (S_4 (S_1 S_3 - C_1 C_2 S_3) - C_1 C_4 S_2) & 0 & C_5 (S_4 (S_1 S_3 - \\ S_5 (S_4 (C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) + C_4 S_1 S_2) & 0 & -C_5 (S_4 (C_1 S_3 + \\ -S_5 (C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4) & 0 & C_5 (C_2 C_4 - \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} -C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2) & 0 \\ +C_2C_3S_4) + C_4S_1S_2 & 0 \\ -C_3S_2S_4) & 0 \\ & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{645} = \frac{\partial \mathbf{U}_{64}}{\partial \theta_5} = & \begin{pmatrix} -C_6S_5(S_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2) & S_5S_6(S_4(S_1S_3 - \\ C_6S_5(S_4(C_1S_3 - C_2C_3S_1) + C_1C_4S_2) & -S_5S_6(S_4(C_1S_3 + \\ -C_6S_5(C_2C_4 - C_3S_2S_4) & S_5S_6(C_2S_4 - C_3S_2S_4) \\ 0 & 0 \\ -C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2) & C_5(S_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2) & -L_4C_6S_5(S_4(S_1S_3 - \\ +C_2C_3S_1) + C_4S_1S_2 & -C_5(S_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) + C_4S_1S_2 & L_4C_6S_5(S_4(C_1S_3 + \\ C_5(C_2S_4 - C_3S_2S_4) & -L_4C_6S_5(C_2C_4 \\ 0 & 0 \\ -C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2) & \\ +C_2C_3S_1) + C_4S_1S_2 & \\ -C_3S_2S_4) & \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{555} = \frac{\partial \mathbf{U}_{55}}{\partial \theta_5} = & \begin{pmatrix} C_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) - S_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3) & 0 \\ S_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3) - C_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) & 0 \\ -C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) - S_2S_3S_5 & 0 \\ 0 & 0 \\ S_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) + C_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3) & 0 \\ -S_5(C_4(C_1S_3 - C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) - C_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3) & 0 \\ C_5S_2S_4 - S_5(C_3S_4 - C_3C_4S_2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{655} = \frac{\partial \mathbf{U}_{65}}{\partial \theta_5} = & \begin{pmatrix} C_5C_6(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) - C_6S_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3) \\ C_6S_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3) - C_5C_6(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) \\ -C_5C_6(C_2S_4 + C_3C_4S_2) - C_6S_2S_3S_5 \\ 0 \\ L_4C_5C_6(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) - L_4C_6S_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3) & S_5S_6(C_3S_1 + \\ L_4C_6S_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3) - L_4C_5C_6(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) & C_5S_6(C_4(C_1S_3 + \\ -L_4C_5C_6(C_2S_4 + C_3C_4S_2) - L_4C_6S_2S_3S_5 \\ 0 \\ +C_1C_2S_3) - C_5S_6(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1C_2S_3) & S_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) + \\ +C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) - S_5S_6(C_1C_3 - C_2S_1S_3) & -S_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) - \\ C_5S_6(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5S_6 & C_5S_2S_3 - S_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) \\ 0 & 0 \\ +C_1C_2S_3) & \\ -C_2S_1S_3 & \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{665} = \frac{\partial \mathbf{U}_{66}}{\partial \theta_5} = & \begin{pmatrix} -S_6(S_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1S_2S_4) + C_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3)) \\ S_6(S_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) + C_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3)) \\ S_6(S_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) - C_5S_2S_3) \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} -C_6(S_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) + C_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3)) & 0 \\ C_6(S_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) + C_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3)) - & 0 \\ C_6(S_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) - C_5S_2S_3) & 0 \\ 0 & 0 \\ -L_4S_6(S_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) + C_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3)) & \\ L_4S_6(S_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) + C_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3)) & \\ L_4S_6(S_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) - C_5S_2S_3) & \\ 0 & \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{616} = \frac{\partial \mathbf{U}_{61}}{\partial \theta_6} = & \begin{pmatrix} S_6(C_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) - S_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3)) - \\ S_6(C_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) - S_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3)) - \\ 0 & \\ 0 & \\ -C_6(S_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) + C_4S_1S_2) & S_6(S_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) + C_4S_1S_2) + \\ -C_6(S_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2) & S_6(S_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2) + \\ 0 & \\ 0 & \\ +C_6(C_5(C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) - S_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3)) & 0L_4S_6(C_5(C_4(C_1S_3 + \\ +C_6(C_5(C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) - S_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3)) & 0L_4S_6(C_5(C_4(S_1S_3 - \\ 0 & \\ 0 & \\ +C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4) - C_5(C_1C_3 - C_2S_1S_3)) - L_4C_6(S_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) + C_4S_1S_2) \\ -C_1C_2C_3) + C_1S_2S_4) - S_5(C_3S_1 + C_1C_2S_3)) - L_4C_6(S_4(C_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2) & \\ 0 & \\ 0 & \\ C_1(S_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) + C_1C_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4)) & \\ S_1(S_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) + C_6S_1(C_2C_4 - C_3S_2S_4)) & \\ S_6(C_5(S_2S_4 - C_2C_3C_4) - C_2S_3S_5) + C_6(C_4S_2 + C_2C_3S_4) & \\ 0 & \\ C_1C_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) - C_1S_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4) & 0 \\ C_6S_1(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) - S_1S_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4) & 0 \\ C_6C_5(S_2S_4 - C_2C_3C_4) - C_2S_3S_5) - S_6(C_4S_2 + C_2C_3S_4) & 0 \\ 0 & 0 \\ L_4C_1S_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) + L_4C_1C_6(C_2C_4(C_1C_3 - C_3S_2S_4) - C_3S_2S_4) & \\ L_4S_1S_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) + L_4C_6S_1(C_2C_4 - C_3S_2S_4) - C_3S_2S_4) & \\ L_4C_6(C_4S_2 + C_2C_3S_4) + L_4S_6(C_5(S_2S_4 - C_2C_3C_5) - C_2S_3S_5) & \\ 0 & \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}_{626} = \frac{\partial \mathbf{U}_{62}}{\partial \theta_6} = & \begin{pmatrix} C_1(S_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) + C_1C_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4)) \\ S_1(S_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) + C_6S_1(C_2C_4 - C_3S_2S_4)) \\ S_6(C_5(S_2S_4 - C_2C_3C_4) - C_2S_3S_5) + C_6(C_4S_2 + C_2C_3S_4) \\ 0 \\ C_1C_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) - C_1S_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4) & 0 \\ C_6S_1(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) - S_1S_6(C_2C_4 - C_3S_2S_4) & 0 \\ C_6C_5(S_2S_4 - C_2C_3C_4) - C_2S_3S_5) - S_6(C_4S_2 + C_2C_3S_4) & 0 \\ 0 & 0 \\ L_4C_1S_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) + L_4C_1C_6(C_2C_4(C_1C_3 - C_3S_2S_4) - C_3S_2S_4) & \\ L_4S_1S_6(C_5(C_2S_4 + C_3C_4S_2) + S_2S_3S_5) + L_4C_6S_1(C_2C_4 - C_3S_2S_4) - C_3S_2S_4) & \\ L_4C_6(C_4S_2 + C_2C_3S_4) + L_4S_6(C_5(S_2S_4 - C_2C_3C_5) - C_2S_3S_5) & \\ 0 & \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Қосымша 2

$$I_{xx} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-e}^0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (y^2 + z^2) \rho dx dy dz =$$

$$\bar{z} \Rightarrow 1) \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rho (y^2 + z^2) dz = \left(\rho y^3 z + \frac{\rho z^3}{3} \right) \Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \rho y^2 \frac{b}{2} + \rho \left(\frac{b}{3} \right)^2 \cdot \frac{1}{3} -$$

$$- \rho y^2 \left(-\frac{b}{2} \right) - \rho \left(-\frac{z}{3} \right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \rho y^2 \frac{b}{2} + \rho \frac{b^3}{24} + \rho y^2 \frac{b}{2} - \rho \frac{b^3}{24} = \rho y^2 b + \frac{\rho b^3}{12}$$

$$\bar{y} \Rightarrow 2) \int_{-e}^0 \left(\rho y^2 b + \frac{\rho b^3}{12} \right) dy = \left(\frac{\rho y^3 b}{3} + \frac{\rho b^3}{12} y \right) \Big|_{-e}^0 = 0 + 0 - \frac{\rho (e)^3 b}{3} -$$

$$- \frac{\rho b^3}{12} (-e) = \frac{\rho e^3 b}{3} - \frac{\rho b^3 e}{12}$$

$$\bar{x} \Rightarrow 3) \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{\rho e^3 b}{3} + \frac{\rho b^3 e}{12} \right) dx = \left(\frac{\rho e^3 b}{3} x + \frac{\rho b^3 e}{12} x \right) \Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{\rho e^3 b a}{3 \cdot 2} + \frac{\rho b^3 e \cdot a}{24} -$$

$$- \frac{\rho e^3 b (-a)}{3 \cdot 2} - \frac{\rho b^3 e \cdot (-a)}{24} = \frac{\rho e^3 b a}{3} + \frac{\rho b^3 e a}{12} = \frac{m b^3 e a}{3 a b e} + \frac{m b^3 e a}{a b e \cdot 12} =$$

$$= \frac{m e^2}{3} + \frac{m b^2}{12}$$

$$I_{yy} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-e}^0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x^2 + z^2) \rho dx dy dz = m \left(\frac{e^2}{3} + \frac{a^2}{12} \right)$$

$$I_{zz} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-e}^0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x^2 + y^2) \rho dx dy dz = m \left(\frac{e^2}{3} + \frac{a^2}{12} \right)$$

$$I_{xy} = I_{yx} = I_{xz} = I_{zx} = I_{yz} = I_{zy} = 0$$

$$I_{xx} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^e (y^2 + z^2) \rho dx dy dz = m_1 \left(\frac{a^2}{12} + \frac{b^2}{12} \right)$$

$$I_{yy} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^e (x^2 + z^2) \rho dx dy dz = m_1 \left(\frac{e^2}{3} + \frac{a^2}{12} \right)$$

$$I_{zz} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^e (x^2 + y^2) \rho dx dy dz = m_1 \left(\frac{e^2}{3} + \frac{b^2}{12} \right)$$

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} \frac{m_1 e^2}{3} & 0 & 0 & \frac{m_1 e}{2} \\ 0 & \frac{m_1 b^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1 a^2}{3} & 0 \\ \frac{m_1 e}{2} & 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix}$$

$$I_{xx} = \int_{-e}^0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (y^2 + z^2) \rho dx dy dz = m_1 \left(\frac{a^2}{12} + \frac{e^2}{3} \right)$$

$$I_{yy} = \int_{-e}^0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (x^2 + z^2) \rho dx dy dz = \frac{m_1 e^2}{3} + \frac{m_1 b^2}{12}$$

$$I_{zz} = \int_{-e}^0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (x^2 + y^2) \rho dx dy dz = m_1 \left(\frac{a^2}{12} + \frac{b^2}{12} \right)$$

$$\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} \frac{m_1 b^2}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1 a^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 \end{pmatrix}$$

$$I_{xx} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-e}^0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (y^2 + z^2) \rho dx dy dz = m_2 \left(\frac{e_2^2}{3} + \frac{b^2}{12} \right)$$

$$I_{yy} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-e}^0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x^2 + z^2) \rho dx dy dz = m_2 \left(\frac{a^2}{12} + \frac{b^2}{12} \right)$$

$$I_{zz} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-e}^0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x^2 + y^2) \rho dx dy dz = \frac{m_2 e_2^2}{3} + \frac{m_2 a^2}{12}$$

$$\mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} \frac{m_2 a^2}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2 e_2^2}{3} & 0 & \frac{-m_2 e_2^2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{m_2 b^2}{12} & 0 \\ 0 & \frac{-m_2 e_2}{3} & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$I_{xx} = \int_0^e \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (y^2 + z^2) \rho dx dy dz = \frac{m_2 e_2^2}{3} + \frac{m_2 b^2}{12}$$

$$I_{yy} = \int_0^e \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x^2 + z^2) \rho dx dy dz = m_2 \left(\frac{a^2}{12} + \frac{e_2^2}{3} \right)$$

$$I_{zz} = \int_0^e \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x^2 + y^2) \rho dx dy dz = m_2 \left(\frac{a^2}{12} + \frac{b^2}{12} \right)$$

$$\mathbf{I}_5 = \begin{bmatrix} \frac{m_2 a^2}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2 b^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2 e_2^2}{2} & \frac{m_2 e_2}{2} \\ 0 & 0 & \frac{m_2 e_2}{2} & m_2 \end{bmatrix}$$

$$I_{xx} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^e \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (y^2 + z^2) \rho dx dy dz = \frac{m_3 e_3^2}{3} + \frac{m_3 e^2}{12}$$

$$I_{yy} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^e \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x^2 + z^2) \rho dx dy dz = \frac{m_3 a^2}{12} + \frac{m_3 b^2}{12}$$

$$I_{zz} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^e \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x^2 + y^2) \rho dx dy dz = \frac{m_3 a^2}{12} + \frac{m_3 e_3^2}{3}$$

$$\mathbf{I}_6 = \begin{bmatrix} \frac{m_3 a^2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_3 e_3^2}{3} & 0 & \frac{m_3 e_3}{3} \\ 0 & 0 & \frac{m_3 b^2}{12} & 0 \\ 0 & \frac{m_3 e_3}{3} & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

Қосымша 3

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$\begin{aligned}
& +Tr(\mathbf{U}_{645}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{65}^T)\dot{q}_4\dot{q}_5 + Tr(\mathbf{U}_{646}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{65}^T)\dot{q}_4\dot{q}_6 + Tr(\mathbf{U}_{651}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{65}^T)\dot{q}_5\dot{q}_1 + \\
& +Tr(\mathbf{U}_{652}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{65}^T)\dot{q}_5\dot{q}_2 + Tr(\mathbf{U}_{653}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{65}^T)\dot{q}_5\dot{q}_3 + Tr(\mathbf{U}_{654}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{65}^T)\dot{q}_5\dot{q}_4 + \\
& +Tr(\mathbf{U}_{655}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{65}^T)\dot{q}_5^2 + Tr(\mathbf{U}_{656}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{65}^T)\dot{q}_5\dot{q}_6 + Tr(\mathbf{U}_{661}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{65}^T)\dot{q}_6\dot{q}_1 + \\
& +Tr(\mathbf{U}_{662}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{65}^T)\dot{q}_6\dot{q}_2 + Tr(\mathbf{U}_{663}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{65}^T)\dot{q}_6\dot{q}_3 + Tr(\mathbf{U}_{664}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{65}^T)\dot{q}_6\dot{q}_4 + \\
& +Tr(\mathbf{U}_{665}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{65}^T)\dot{q}_6\dot{q}_5 + Tr(\mathbf{U}_{666}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{65}^T)\dot{q}_6^2 + m_5g\mathbf{U}_{55}^5\bar{\mathbf{r}}_5 + m_6g\mathbf{U}_{65}^6\bar{\mathbf{r}}_6 \\
\tau_6 = & Tr(\mathbf{U}_{61}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\ddot{q}_1 + Tr(\mathbf{U}_{62}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\ddot{q}_2 + Tr(\mathbf{U}_{63}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\ddot{q}_3 + Tr(\mathbf{U}_{64}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\ddot{q}_4 + \\
& +Tr(\mathbf{U}_{65}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\ddot{q}_5 + Tr(\mathbf{U}_{66}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\ddot{q}_6 + Tr(\mathbf{U}_{611}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_1^2 + \\
& +Tr(\mathbf{U}_{612}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_1\dot{q}_2 + Tr(\mathbf{U}_{613}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_1\dot{q}_3 + Tr(\mathbf{U}_{614}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_1\dot{q}_4 + \\
& +Tr(\mathbf{U}_{615}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_1\dot{q}_5 + Tr(\mathbf{U}_{616}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_1\dot{q}_6 + Tr(\mathbf{U}_{621}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_2\dot{q}_1 + \\
& +Tr(\mathbf{U}_{622}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_2^2 + Tr(\mathbf{U}_{623}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_2\dot{q}_3 + Tr(\mathbf{U}_{624}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_2\dot{q}_4 + \\
& +Tr(\mathbf{U}_{625}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_2\dot{q}_5 + Tr(\mathbf{U}_{626}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_2\dot{q}_6 + Tr(\mathbf{U}_{631}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_3\dot{q}_1 + \\
& +Tr(\mathbf{U}_{632}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_3\dot{q}_2 + Tr(\mathbf{U}_{633}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_3^2 + Tr(\mathbf{U}_{634}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_3\dot{q}_4 + \\
& +Tr(\mathbf{U}_{635}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_3\dot{q}_5 + Tr(\mathbf{U}_{636}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_3\dot{q}_6 + Tr(\mathbf{U}_{641}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_4\dot{q}_1 + \\
& +Tr(\mathbf{U}_{642}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_4\dot{q}_2 + Tr(\mathbf{U}_{643}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_4\dot{q}_3 + Tr(\mathbf{U}_{644}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_4^2 + \\
& +Tr(\mathbf{U}_{645}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_4\dot{q}_5 + Tr(\mathbf{U}_{646}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_4\dot{q}_6 + Tr(\mathbf{U}_{651}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_5\dot{q}_1 + \\
& +Tr(\mathbf{U}_{652}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_5\dot{q}_2 + Tr(\mathbf{U}_{653}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_5\dot{q}_3 + Tr(\mathbf{U}_{654}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_5\dot{q}_4 + \\
& +Tr(\mathbf{U}_{655}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_5^2 + Tr(\mathbf{U}_{656}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_5\dot{q}_6 + Tr(\mathbf{U}_{661}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_6\dot{q}_1 + \\
& +Tr(\mathbf{U}_{662}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_6\dot{q}_2 + Tr(\mathbf{U}_{663}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_6\dot{q}_3 + Tr(\mathbf{U}_{664}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_6\dot{q}_4 + \\
& +Tr(\mathbf{U}_{665}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_6\dot{q}_5 + Tr(\mathbf{U}_{666}\mathbf{J}_6\mathbf{U}_{66}^T)\dot{q}_6^2 + m_6g\mathbf{U}_{66}^6\bar{\mathbf{r}}_6
\end{aligned}$$

Қосымша 4

```
function robot_dynamics()
clc; close all;
L1 = 0.050;
L2 = 0.025;
L3 = 0.030;
L4 = 0.008;
g0 = [0; -9.81; 0];
theta_offsets = [-pi/2; +pi/2; +pi/2; 0; 0; +pi/2];
alpha = [+pi/2; -pi/2; +pi/2; +pi/2; +pi/2; 0];
a = [0; 0; 0; 0; 0; L4];
d = [0; 0; -L2; 0; +L3; 0];
m = [ ...
    1.06936;
    0.38000;
    0.21000;
    0.26500;
    0.04622;
    0.25047];
rc = [ ...
    -0.00484, 0.00003, -0.03418;
    0.07450, 0.00451, -0.01490;
    -0.00639, -0.00427, -0.17400;
    0.00016, -0.12000, -0.00796;
    0.00000, -0.00809, -0.01858;
    0.00263, 0.05002, 0.01365];
Ic = zeros(3,3,6);
Ic(:,:,1) = 1e-9 * [ ...
    2419457.11, -3003.45, -178224.01;
    -3003.45, 2457251.51, -1236.80;
    -178224.01, -1236.80, 1029936.35];
Ic(:,:,2) = 1e-9 * [ ...
    2.44e5, 9.28e4, 2.44e5;
    9.28e4, 1.65e6, 1.49e4;
    2.44e5, 1.49e4, 1.69e6];
Ic(:,:,3) = 1e-9 * [ ...
    2.32e5, -118.0, -6.01e3;
    -118.0, 2.07e5, 3.86e4;
    -6.01e3, 3.86e4, 1.18e5];
Ic(:,:,4) = 1e-9 * [ ...
    9.84e5, -1.68e3, -20.4;
    -1.68e3, 1.72e5, 7.79e3;
    -20.4, 7.79e3, 9.14e5];
```

```

Ic(:,5) = 1e-9 * [ ...
    39072.12, 0.0, 0.01;
    0.0, 18830.08, -736.73;
    0.01, -736.73, 30612.85];
Ic(:,6) = 1e-9 * [ ...
    712891.75, 98761.99, -27447.82;
    98761.99, 216004.23, 14847.13;
    -27447.82, 14847.13, 587613.66];
q_test = deg2rad([10; -5; 15; 0; 0; 0]);
qd_test = zeros(6,1);
qdd_test = zeros(6,1);
tau_g = inverse_dynamics(q_test, qd_test, qdd_test, theta_offsets, alpha, a, d, m, rc,
Ic, g0);
disp('Gravity torque at q_test [Nm]:'), disp(tau_g.)
dt = 0.01;
Tsim = 3.0;
t = (0:dt:Tsim).';
q_start = deg2rad([0;0;0;0;0;0]);
q_goal = deg2rad([30;-20;25;10;-15;20]);
Tmove = 2.0;
Kp = diag([80 80 60 30 25 20]);
Kd = diag([18 18 14 8 7 6]);
n = 6;
Q = zeros(length(t), n);
Qdes = zeros(length(t), n);
TAU = zeros(length(t), n);
PEE = zeros(length(t), 3);
state = [q_start; zeros(n,1)];
for k=1:length(t)
    ti = t(k);
    [k1, tau1, qdes1] = state_derivative(state, ti, q_start, q_goal, Tmove, Kp, Kd, ...
        theta_offsets, alpha, a, d, m, rc, Ic, g0);
    [k2, ~, ~] = state_derivative(state + 0.5*dt*k1, ti + 0.5*dt, q_start, q_goal, Tmove,
Kp, Kd, ...
        theta_offsets, alpha, a, d, m, rc, Ic, g0);
    [k3, ~, ~] = state_derivative(state + 0.5*dt*k2, ti + 0.5*dt, q_start, q_goal, Tmove,
Kp, Kd, ...
        theta_offsets, alpha, a, d, m, rc, Ic, g0);
    [k4, ~, ~] = state_derivative(state + dt*k3, ti + dt, q_start, q_goal, Tmove, Kp, Kd,
...
        theta_offsets, alpha, a, d, m, rc, Ic, g0);
    state = state + (dt/6)*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
    q = state(1:n);
    Q(k,:) = q.';

```

```

    Qdes(k,:) = qdes1.';
    TAU(k,:) = tau1.';
    pe = end_effector_pos(q, theta_offsets, alpha, a, d);
    pe(1) = pe(1) + L1; % for plotting
    PEE(k,:) = pe.';
end
figure;
hold on;
for i=1:n
    plot(t, rad2deg(Q(:,i)), 'LineWidth',1);
    plot(t, rad2deg(Qdes(:,i)), '--', 'LineWidth',1);
end
grid on; xlabel('t [s]'); ylabel('Joint angles [deg]');
title('Forward dynamics tracking (solid=actual, dashed=desired)');
figure; hold on;
for i=1:n
    plot(t, TAU(:,i), 'LineWidth',1);
end
grid on; xlabel('t [s]'); ylabel('Torque [Nm]');
title('Computed torques');
figure;
plot3(PEE(:,1), PEE(:,2), PEE(:,3), 'LineWidth',1);
grid on; xlabel('X [m]'); ylabel('Y [m]'); zlabel('Z [m]');
title('End-effector trajectory (base translation L1 included for plot)');
end
function A = dh_A(theta,d,a,alpha)
ct = cos(theta); st = sin(theta);
ca = cos(alpha); sa = sin(alpha);
A = [ ct, -st*ca, st*sa, a*ct;
      st, ct*ca, -ct*sa, a*st;
      0,  sa,  ca,  d;
      0,  0,  0,  1];
end
function [T,p,z] = fk_all(q, theta_offsets, alpha, a, d)
T = cell(7,1);
T{1} = eye(4);
for i=1:6
    th = q(i) + theta_offsets(i);
    Ai = dh_A(th, d(i), a(i), alpha(i));
    T{i+1} = T{i} * Ai;
end
p = zeros(3,7);
z = zeros(3,6);
for i=1:7

```

```

    p(:,i) = T{i}(1:3,4);
end
for i=1:6
    z(:,i) = T{i}(1:3,3); % z0..z5 in base
end
end
function pe = end_effector_pos(q, theta_offsets, alpha, a, d)
[T,p,~] = fk_all(q, theta_offsets, alpha, a, d);
pe = p(:,7);
end
function [pc,Jv,Jw,Rk] = com_pos_and_jac(q, link_i, theta_offsets, alpha, a, d, rc)
[T,p,z] = fk_all(q, theta_offsets, alpha, a, d);
k = link_i - 1; % frame {i-1}
Rk = T{k+1}(1:3,1:3);
pc = p(:,k+1) + Rk * rc(link_i,:).';
Jv = zeros(3,6);
Jw = zeros(3,6);
for j=1:6
    if (j-1) <= k
        Jw(:,j) = z(:,j);
        Jv(:,j) = cross(z(:,j), pc - p(:,j));
    end
end
end
function M = mass_matrix(q, theta_offsets, alpha, a, d, m, rc, Ic)
M = zeros(6,6);
for i=1:6
    [~,Jv,Jw,Rk] = com_pos_and_jac(q, i, theta_offsets, alpha, a, d, rc);
    I0 = Rk * Ic(:, :, i) * Rk.';
    M = M + m(i)*(Jv.'*Jv) + (Jw.'*I0*Jw);
end
M = 0.5*(M+M. ');
end
function gq = gravity_vector(q, theta_offsets, alpha, a, d, m, rc, Ic, g0)
gq = zeros(6,1);
for i=1:6
    [~,Jv,~,~] = com_pos_and_jac(q, i, theta_offsets, alpha, a, d, rc);
    gq = gq + Jv.' * (m(i)*g0);
end
end
function C = coriolis_matrix(q, qd, theta_offsets, alpha, a, d, m, rc, Ic)
n = 6;
eps = 1e-6;
dM = zeros(n,n,n);

```

```

for k=1:n
    dq = zeros(n,1); dq(k)=eps;
    Mp = mass_matrix(q+dq, theta_offsets, alpha, a, d, m, rc, Ic);
    Mm = mass_matrix(q-dq, theta_offsets, alpha, a, d, m, rc, Ic);
    dM(:,:,k) = (Mp - Mm)/(2*eps);
end
C = zeros(n,n);
for i=1:n
    for j=1:n
        s = 0;
        for k=1:n
            s = s + 0.5*( dM(i,j,k) + dM(i,k,j) - dM(j,k,i) ) * qd(k);
        end
        C(i,j) = s;
    end
end
end
function tau = inverse_dynamics(q, qd, qdd, theta_offsets, alpha, a, d, m, rc, Ic, g0)
M = mass_matrix(q, theta_offsets, alpha, a, d, m, rc, Ic);
C = coriolis_matrix(q, qd, theta_offsets, alpha, a, d, m, rc, Ic);
gq = gravity_vector(q, theta_offsets, alpha, a, d, m, rc, Ic, g0);
tau = M*qdd + C*qd + gq;
end
function qdd = forward_dynamics(q, qd, tau, theta_offsets, alpha, a, d, m, rc, Ic, g0)
M = mass_matrix(q, theta_offsets, alpha, a, d, m, rc, Ic);
C = coriolis_matrix(q, qd, theta_offsets, alpha, a, d, m, rc, Ic);
gq = gravity_vector(q, theta_offsets, alpha, a, d, m, rc, Ic, g0);
qdd = M \ (tau - C*qd - gq);
end
function [q,qd,qdd] = quintic(t, T, q0, qf)
if t<=0
    q=q0; qd=zeros(size(q0)); qdd=zeros(size(q0)); return;
end
if t>=T
    q=qf; qd=zeros(size(q0)); qdd=zeros(size(q0)); return;
end
s = t/T;
h = 10*s^3 - 15*s^4 + 6*s^5;
hd = (30*s^2 - 60*s^3 + 30*s^4)/T;
hdd = (60*s - 180*s^2 + 120*s^3)/(T*T);
q = q0 + (qf-q0)*h;
qd = (qf-q0)*hd;
qdd = (qf-q0)*hdd;
end

```

```

function [dst, tau, qdes] = state_derivative(state, t, q0, qf, Tmove, Kp, Kd, ...
    theta_offsets, alpha, a, d, m, rc, Ic, g0)
n=6;
q = state(1:n);
qd = state(n+1:end);
[qdes, qd_des, qdd_des] = quintic(t, Tmove, q0, qf);
v = qdd_des + Kd*(qd_des - qd) + Kp*(qdes - q);
M = mass_matrix(q, theta_offsets, alpha, a, d, m, rc, Ic);
C = coriolis_matrix(q, qd, theta_offsets, alpha, a, d, m, rc, Ic);
gq = gravity_vector(q, theta_offsets, alpha, a, d, m, rc, Ic, g0);
tau = M*v + C*qd + gq;
qdd = forward_dynamics(q, qd, tau, theta_offsets, alpha, a, d, m, rc, Ic, g0);
dst = [qd; qdd];
end

```

Қосымша 5

```
function FK_Arm_GUI()
    L1 = 0.25;
    L2 = 0.30;
    L3 = 0.08;
    thetaOffset = [-90 90 90 0 0 90];
    alpha      = [ 90 -90 90 90 90 0];
    a          = [ 0 0 0 0 0 L3];
    d          = [ 0 0 -L1 0 L2 0];
    q = zeros(6,1);
    fig = figure('Name','Forward Kinematics 6DOF','Color','w','Position',[200 100 1250
750]);
    ax = axes('Parent',fig,'Position',[0.35 0.2 0.6 0.75]);
    axis(ax,'equal'); grid(ax,'on');
    xlabel(ax,'X [M]'); ylabel(ax,'Y [M]'); zlabel(ax,'Z [M]');
    view(ax,135,25);
    jointColors = [1 0 0; 0 0.6 0; 0 0 1; 1 0.5 0; 1 0 1; 0 0.8 0.8];
    sliderY = linspace(0.85,0.20,6);
    for i = 1:6
        uicontrol('Parent',fig,'Style','text',...
            'Units','normalized','Position',[0.02 sliderY(i)+0.03 0.06 0.03],...
            'String',['theta_',num2str(i)],'FontSize',11,...
            'HorizontalAlignment','left','BackgroundColor','w','ForegroundColor',jointColors(i,:));
        uicontrol('Parent',fig,'Style','slider',...
            'Units','normalized','Position',[0.08 sliderY(i)+0.035 0.20 0.025],...
            'Min',-180,'Max',180,'Value',0,...
            'Callback',@(h,~) onSlider(i, h.Value));
    end
    uicontrol('Parent',fig,'Style','pushbutton','String','Circle simulation',...
        'Units','normalized','Position',[0.02 0.08 0.14 0.05],'Callback',@(~,~)
simulateCircle());
    uicontrol('Parent',fig,'Style','pushbutton','String','Sinusoidal motion',...
        'Units','normalized','Position',[0.18 0.08 0.16 0.05],'Callback',@(~,~)
simulateWave());
    uicontrol('Parent',fig,'Style','pushbutton','String','Home',...
        'Units','normalized','Position',[0.36 0.08 0.12 0.05],'Callback',@(~,~)
goHome());
    drawRobot();
    function onSlider(idx, val)
        q(idx) = val;
        drawRobot();
    end
    function drawRobot()
```

```

T = eye(4);
P = zeros(3,7); P(:,1) = [0;0;0];
for i = 1:6
    theta_i = thetaOffset(i) + q(i);
    T = T * modDH(theta_i, d(i), a(i), alpha(i));
    P(:,i+1) = T(1:3,4);
end
cla(ax); hold(ax,'on');
plot3(ax,P(1,:),P(2,:),P(3,:), 'b-o', 'LineWidth',2, 'MarkerFaceColor','r');
for k=1:7
    plot3(ax,P(1,k),P(2,k),P(3,k), 'o', 'MarkerSize',10, 'MarkerFaceColor',jointColors(min(k
,6),:),'MarkerEdgeColor','k');
end
drawFrame(ax,eye(4),0.12);
drawFrame(ax,T,0.10);
axis(ax,[-1,1,-1,1,-1,1]);
title(ax,'Forward Kinematics 6DOF Humanoid Robot Right Arm');
hold(ax,'off');
drawnow;
end
function T = modDH(theta_deg, dz, ax, alpha_deg)
    th = deg2rad(theta_deg); al = deg2rad(alpha_deg);
    Tz = [1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 dz; 0 0 0 1];
    Rz = [cos(th) -sin(th) 0 0; sin(th) cos(th) 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1];
    Tx = [1 0 0 ax; 0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1];
    Rx = [1 0 0 0; 0 cos(al) -sin(al) 0; 0 sin(al) cos(al) 0; 0 0 0 1];
    T = Tz * Rz * Tx * Rx;
end
function drawFrame(axHandle, T, scale)
    o = T(1:3,4); Rm = T(1:3,1:3);
    quiver3(axHandle,o(1),o(2),o(3),
scale*Rm(1,1),scale*Rm(2,1),scale*Rm(3,1),'r','LineWidth',2);
    quiver3(axHandle,o(1),o(2),o(3),
scale*Rm(1,2),scale*Rm(2,2),scale*Rm(3,2),'g','LineWidth',2);
    quiver3(axHandle,o(1),o(2),o(3),
scale*Rm(1,3),scale*Rm(2,3),scale*Rm(3,3),'b','LineWidth',2);
end
function simulateCircle()
    t = linspace(0,2*pi,80);
    for k = 1:length(t)
        q(1) = 30*sin(t(k));
        q(2) = 40*cos(t(k));
        q(3) = 20*sin(2*t(k));
    end
end

```

```

        q(4:6) = 0;
        drawRobot(); pause(0.03);
    end
end
function simulateWave()
    t = linspace(0,4*pi,120);
    for k = 1:length(t)
        for i = 1:6, q(i) = 45*sin(t(k) + (i-1)*pi/4); end
        drawRobot(); pause(0.02);
    end
end
function goHome()
    steps = 40; qStart = q; qGoal = zeros(6,1);
    for s = 1:steps, q = qStart + (qGoal-qStart)*s/steps; drawRobot(); pause(0.02);
end
end
end

```